

ДВОЙСТВЕННАЯ ВАРИАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, УЧИТЫВАЮЩАЯ ПРОСТРАНСТВЕННУЮ НЕЛОКАЛЬНОСТЬ

И.Ю. Савельева

inga.savelyeva@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Теории микроконтинуума имеют большой потенциал для моделирования структурно-чувствительных материалов. Основы нелокальной механики на примере теории упругости изложены в достаточно большом числе работ. В настоящее время исследования возможностей использования нелокальной механики при моделировании наноразмерных устройств, наноэлектромеханических систем (NEMS), сред со сложной внутренней микро- и наноструктурой являются актуальными. Как правило, анализ таких моделей связан с преодолением определенных трудностей, вызванных необходимостью численного решения интегродифференциальных уравнений. Возможности анализа математических моделей непрерывной среды могут быть расширены в результате применения вариационных методов. Описано построение альтернативного функционала для задачи стационарной теплопроводности в однородном теле с учетом эффектов нелокальности и с независимым от температуры коэффициентом теплопроводности. Показано, что условия стационарности этого функционала совпадают с аналогичными условиями при отсутствии нелокальности. Альтернативный функционал в сочетании с ранее представленным основным функционалом составляют двойственную вариационную модель. Количественный анализ проведен на примере задачи о неограниченной в своей плоскости пластине с действующими постоянными внутренними источниками тепловыделения. Двойственная вариационная формулировка задачи позволяет не только получить приближенное решение рассматриваемой

Ключевые слова

Математическая модель, нелокальность, двойственная вариационная формулировка, функционал

задачи, но и оценить его погрешность, а также при необходимости уменьшить эту погрешность путем подбора аппроксимирующих функций

Поступила 15.06.2022

Принята 08.07.2022

© Автор(ы), 2022

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (проект № 0705-2020-0047)

Введение. Для изучения свойств и особенностей поведения новых перспективных структурно-чувствительных материалов необходимо построение математических моделей на атомарном уровне и на мезоуровне, учитывающем взаимодействие между структурными элементами таких материалов. При этом актуально применение модифицированных моделей сплошной среды, позволяющих учесть связь характеристик материалов на макро- и микроуровнях. Один из известных подходов к построению таких моделей связан с учетом влияния пространственной и временной нелокальности сплошной среды [1–4]. Теории микроконтинуума имеют большой потенциал для моделирования современных материалов. Во многих работах, например [5–8], изложены теоретические основы и возможные подходы к построению моделей нелокальной механики. Источниками пространственной нелокальности могут служить градиенты перемещений, микродеформации и т. п. Впервые модель нелокального континуума изложена в [9], где описан учет дальнедействующего эффекта сил сцепления. Затем была разработана современная версия нелокальной механики [10, 11], в которой использованы функции влияния, описывающие затухание дальнедействующего взаимодействия между двумя частицами с расстоянием между ними.

Пространственная и временная нелокальности также могут быть учтены и при моделировании процессов теплопереноса. Экспериментальные исследования температурных полей на границах раздела зерен металлов и в нанопроволоках, подтверждающие необходимость разработки новых математических моделей теплопроводности, описаны в [12–14].

Постановка задачи. В случае стационарного процесса теплопроводности в структурно-чувствительном материале с коэффициентом теплопроводности $\lambda = \text{const}$ влияние пространственной нелокальности может быть учтено введением в соотношение, вытекающее из гипотезы Био — Фурье (в научной литературе с исторической точки зрения несправедливо именуемой законом Фурье) и связывающее вектор \mathbf{q} плотности теплового потока и градиент температурного поля, дополнительного интегрального слагаемого [1]. Это приводит к равенству [15–17]:

$$\mathbf{q}(M) + p_1 \lambda(T) \nabla T(M) - p_2 \mathbf{q}^*(M) = \mathbf{0}, M \in \bar{V}. \quad (1)$$

Здесь $p_1, p_2 \in [0, 1]$ — параметры, определяющие степень влияния пространственных локальных и нелокальных эффектов при переносе тепловой энергии; ∇ — векторный дифференциальный оператор Гамильтона; $T(M)$ — температура в точке $M \in \bar{V} = V \cup S$ замкнутой области \bar{V} с поверхностью S , ограничивающей открытую область V ; $\mathbf{0}$ — нулевой вектор;

$$\mathbf{q}^* = -\lambda \nabla T^*(M) = -\lambda \int_V \varphi(M', M) \nabla T(M') dV(M') \quad (2)$$

— векторное поле, возникающее в силу проявления эффекта пространственной нелокальности в окрестности точки $M \in \bar{V}$. Эту окрестность определяет функция влияния $\varphi(M', M)$ указанного эффекта.

При наличии в области V источников тепловыделения с объемной мощностью q_V из закона сохранения тепловой энергии в бесконечно малой окрестности точки $M \in V$ следует равенство $\nabla \cdot \mathbf{q}(M) = q_V(M, T(M))$. Это равенство в сочетании с соотношениями (1) и (2) приводит к интегродифференциальному уравнению [18]

$$\nabla \cdot (p_1 \nabla T(M) + p_2 \nabla T^*(M)) + q_V(M, T(M)) / \lambda = 0, \quad M \in V, \quad (3)$$

описывающему установившееся распределение температуры в области \bar{V} с учетом влияния эффекта пространственной нелокальности. Граничные условия, которым должно удовлетворять решение этого уравнения, имеют вид

$$T(P) = f_T(P), \quad P \in S_T, \quad (4)$$

$$\nabla (p_1 T(P) + p_2 T^*(P)) \cdot \mathbf{n}(P) - f_q(P, T(P)) / \lambda = 0, \quad P \in S_q = S \setminus S_T, \quad (5)$$

где $f_T(P)$, $f_q(P, T(P))$ — заданные функции своих аргументов в точках P на соответствующих участках поверхности S ; \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности S_q .

В общем случае количественный анализ этой модели связан с преодолением определенных трудностей, вызванных необходимостью приближенного численного решения интегродифференциального уравнения (3). Использование конечно-разностных соотношений для аппроксимации производных приводит к погрешностям в вычислениях, которые могут быть сопоставимыми с количественными оценками влияния эффекта пространственной нелокальности. Этот факт отсутствует в случае применения для количественного анализа вариационных моделей, поскольку допустимые для рассмотрения соответствующих функционалов прибли-

женные распределения искомых величин представимы непрерывными и дифференцируемыми функциями. Возникающая при таком представлении погрешность может быть оценена сверху с использованием двойственной вариационной формы математической модели. В частности, для приближенного решения задачи (3)–(5) целесообразно применять модификацию двойственной вариационной модели стационарной теплопроводности [19, 20].

Двойственная вариационная модель стационарного процесса теплопроводности в заданной области V включает в себя два функционала. Один из этих функционалов построен в [18]. Его условиями стационарности являются уравнение (3) и граничное условие (5), определяющее условия теплообмена, которые заданы на участках S_q поверхности S , ограничивающей область V . Этот функционал принято называть основным. Ему можно поставить в соответствие так называемый альтернативный функционал, который вместе с основным составляет упомянутую выше двойственную вариационную модель стационарного процесса теплопроводности в твердом теле. Именно наличие в составе математической модели основного и альтернативного функционалов позволяет не только получить приближенное решение рассматриваемой задачи, но и оценить погрешность этого решения, а также при необходимости уменьшить эту погрешность за счет подбора аппроксимирующих функций из множеств допустимых для каждого из этих функционалов.

Построение альтернативного функционала. Сформулированной задаче (3)–(5) соответствует основной функционал [18]

$$J[T] = \int_V \left(\frac{1-p_2}{2} (\nabla T)^2 - p_2 \int_{T_*}^T (\nabla^2 T^*) dT - \int_{T_*}^T \frac{q_V}{\lambda} dT \right) dV + \\ + \int_{S_q} dS \int_{T_*}^T (p_2 \mathbf{n} \cdot \nabla T^* - f_q / \lambda) dT, \quad (6)$$

где T_* — нижняя грань множества возможных значений температуры в области \bar{V} . Функционал (6) допустимо рассматривать на множестве непрерывных и кусочно-дифференцируемых в области V распределениях температуры. Если граница области V имеет участки S_T , на которых заданы фиксированные значения температуры, то допустимые распределения температуры должны в соответствующих точках принимать эти значения.

Для построения функционала, альтернативного по отношению к основному функционалу (6), расширим область определения последнего

введением векторной функции $\mathbf{q}(M)$, удовлетворяющей равенству (1). В рассматриваемом случае это равенство играет роль дополнительного условия. Этому условию должны удовлетворять функции, на которых допустимо рассматривать альтернативный функционал. Используя векторное равенство (1) в (6), а также добавив в правую часть этого соотношения скалярное произведение левой части равенства (1) и векторного множителя Лагранжа $\mathbf{L}(M)/(1-p_2)$ ($M \in \bar{V}$), запишем

$$J_1[T, \mathbf{q}, \mathbf{L}] = \int_V \left(\frac{(\mathbf{q} - p_2 \mathbf{q}^*)^2}{2(1-p_2)\lambda^2} + \frac{p_2}{\lambda} \int_{T_*}^T (\nabla \cdot \mathbf{q}^*) dT - \int_{T_*}^T (q_V / \lambda) dT \right) dV - \\ - \int_V \mathbf{L} \frac{(\mathbf{q} - p_2 \mathbf{q}^*) / \lambda + (1-p_2) \nabla T}{(1-p_2)\lambda} dV - \frac{1}{\lambda} \int_{S_q} dS \int_{T_*}^T (p_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}^* + f_q) dT. \quad (7)$$

Равенство нулю вариации функционала (7) по всем его аргументам имеет вид

$$\delta J[T, \mathbf{q}, \mathbf{L}, \delta T, \delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{L}] = \\ = \int_V \left(\frac{(\mathbf{q} - p_2 \mathbf{q}^*) \delta(\mathbf{q} - p_2 \mathbf{q}^*)}{(1-p_2)\lambda^2} + \frac{p_2}{\lambda} (\nabla \cdot \mathbf{q}^*) \delta T - (q_V / \lambda) \delta T \right) dV - \\ - \int_V \left(\mathbf{L} \cdot \frac{(\delta \mathbf{q} - p_2 \delta \mathbf{q}^*) / \lambda + (1-p_2) \delta(\nabla T)}{(1-p_2)\lambda} + \frac{(\mathbf{q} - p_2 \mathbf{q}^*) / \lambda + (1-p_2) \nabla T}{(1-p_2)\lambda} \cdot \delta \mathbf{L} \right) dV - \\ - \frac{1}{\lambda} \int_{S_q} (p_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}^* + f_q) \delta T dS = 0. \quad (8)$$

Во втором интеграле в правой части соотношения (8) выделим слагаемое, содержащее $\delta(\nabla T)$, и с применением первой формулы Грина [21] преобразуем в соответствующий интеграл:

$$-\int_V \mathbf{L} \cdot \delta(\nabla T) \lambda dV = -\int_V \mathbf{L} \cdot (\nabla \delta T) \lambda dV = -\int_S \mathbf{L} \cdot \mathbf{n} \lambda \delta T dS + \int_V \nabla \cdot \mathbf{L} \lambda \delta T dV.$$

С учетом преобразованного слагаемого в силу независимости вариаций аргументов функционала (7) в его стационарной точке справедливы равенства:

$$(\mathbf{q}(M) - p_2 \mathbf{q}^*(M) - \mathbf{L}(M)) \cdot \delta \mathbf{q}(M) = 0, \quad M \in \bar{V}, \quad (9)$$

$$\frac{p_2}{1-p_2} (p_2 \mathbf{q}^*(M) - \mathbf{q}(M) + \mathbf{L}(M)) \cdot \delta \mathbf{q}^*(M) = 0, \quad M \in \bar{V}, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\mathbf{q}(M) - p_2 \mathbf{q}^*(M)}{1 - p_2} + \lambda \nabla T(M) \right) \cdot \delta \mathbf{L}(M) = 0, \quad M \in \bar{V}, \quad (11)$$

$$\left(\nabla \cdot \mathbf{L}(M) + p_2 \nabla \cdot \mathbf{q}^*(M) - q_V(M, T(M)) \right) \lambda \delta T(M) = 0, \quad M \in V, \quad (12)$$

$$\left(\mathbf{n}(P) \cdot (\mathbf{L}(P) + p_2 \mathbf{q}^*(P)) + f_q(P, T(P)) \right) \lambda \delta T(P) = 0, \quad P \in S_q. \quad (13)$$

Из равенств (9) и (10) следует одинаковое представление векторного множителя Лагранжа в виде $\mathbf{L} = \mathbf{q} - p_2 \mathbf{q}^*$, что далее позволяет исключить его из рассмотрения и несколько упростить последующие преобразования. Тогда из равенств (12) и (13) получим первые два условия стационарности функционала (7):

$$\nabla \cdot \mathbf{q}(M) - q_V(M, T(M)) = 0, \quad M \in V, \quad (14)$$

$$\mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{q}(P) + f_q(P, T(P)) = 0, \quad P \in S_q. \quad (15)$$

Отметим, что условия (14), (15) совпадают с аналогичными условиями при отсутствии нелокальности [19, 20] и непосредственно следуют из закона сохранения тепловой энергии. Из равенства (11) получим соотношение (1), которое по отношению к функционалу (7) является его третьим условием стационарности.

Установленное равенство для векторного множителя Лагранжа позволяет исключить этот множитель из (7). В результате после соответствующих преобразований с учетом (6) получим функционал

$$J_2[T, \mathbf{q}] = J[T] - \frac{1/(2\lambda^2)}{1 - p_2} \int_V \left(\mathbf{q} + (1 - p_2)\lambda \nabla T - p_2 \mathbf{q}^* \right)^2 dV \quad (16)$$

с дополнительным условием (4). Условиями стационарности этого функционала будут равенства (1), (14) и (15). Из соотношения (16) очевидно, что $J_2[T, \mathbf{q}] \leq J[T]$, а при выполнении условия (1) значения функционалов (6) и (16) совпадают.

Отмеченные свойства функционала (16) позволяют рассматривать его как альтернативный по отношению к основному функционалу (6). Однако указанные три условия стационарности функционала (16) при его использовании усложняют проведение анализа экстремальных свойств этого функционала. Если равенства (4), (14) и (15) использовать в качестве дополнительных для функционала (16), то с учетом (6) после достаточно громоздких преобразований получим альтернативный функционал

$$J_2[T, \mathbf{q}] = - \int_V \left(\frac{(\mathbf{q} - p_2 \mathbf{q}^*)^2}{2(1-p_2)\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \int_{T_*}^T \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{q}^*}{\partial T} - \frac{\partial q_V}{\partial T} \right) dT \right) dV -$$

$$- \frac{1}{\lambda} \int_{S_T} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{q} - p_2 \mathbf{q}^*) f_T dS + \frac{1}{\lambda} \int_{S_q} dS \int_{T_*}^T T \frac{\partial (p_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}^* + f_q)}{\partial T} dT \quad (17)$$

с единственным условием стационарности в виде равенства (1).

Варианты функции влияния. В качестве функции влияния в [1] рассмотрены три варианта, которые могут быть представлены как функции радиус-векторов \mathbf{x}' и \mathbf{x} точек M' и M в виде

$$\varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = \begin{cases} \frac{n+1}{2na^n} \left(1 - \frac{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^n}{a^n} \right), & |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq a; \\ 0, & |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| > a, \end{cases}$$

$$\varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = \frac{(k/l)^n}{\pi^{n/2}} \exp\left(- (k/l)^2 |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2\right), \quad (18)$$

$$\varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = \frac{1}{\pi^3} \prod_{i=1}^3 \frac{\sin \pi (\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}_i) / a}{\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}_i}, \quad |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq a,$$

где n — размерность задачи; $k = \text{const}$; l — характерный размер области V . Любая функция влияния должна удовлетворять условию [1] $\int_V \varphi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) d\mathbf{x}' = 1$.

Пример применения двойственной вариационной модели. Пусть в неограниченной в своей плоскости пластине толщиной $2h$ действуют внутренние источники тепловыделения с объемной мощностью $q_V^\circ = \text{const}$. Поверхности пластины имеют одинаковую температуру T_h , коэффициент теплопроводности материала пластины $\lambda = \text{const}$. При выборе начала отсчета безразмерной координаты $\xi = (x/h) \in [-1; 1]$ от средней плоскости пластины по направлению нормали к этой плоскости стационарное распределение $T(\xi)$ температуры по толщине пластины при граничных условиях

$$T(-1) = T(1) = T_h \quad (19)$$

является четной функцией этой координаты. Если материал пластины обладает эффектом пространственной нелокальности, то функция $T(\xi)$ будет удовлетворять одномерному варианту интегродифференциального уравнения (3), который примет вид

$$(1-p_2) \frac{d^2 T(\xi)}{d\xi^2} + p_2 h \frac{d}{d\xi} \int_{-1}^1 \varphi(\xi', \xi) \frac{dT(\xi')}{d\xi'} d\xi' + \frac{q_V^\circ h^2}{\lambda} = 0. \quad (20)$$

Отметим, что при отсутствии эффекта пространственной нелокальности ($p_2 = 0$) уравнение (20) при граничных условиях (19) имеет решение

$$T(\xi) = T_h + \frac{q_V^\circ h^2}{2\lambda} (1 - \xi^2). \quad (21)$$

Для материала пластины, обладающего эффектом пространственной нелокальности, выберем функцию влияния (18) при $n = 1$ и $a/h = \alpha = 1$ в виде

$$\varphi(\xi', \xi) = \frac{(1 - (\xi' - \xi) \text{sign}(\xi' - \xi))}{h}. \quad (22)$$

Тогда при переходе к безразмерной температуре $\Theta(\xi) = \frac{T(\xi) - T_h}{(q_V^\circ h^2 / \lambda)}$ вме-

сто соотношения (20) с учетом равенства (22) можно записать интегродифференциальное уравнение

$$(1-p_2) \frac{d^2 \Theta(\xi)}{d\xi^2} + p_2 \frac{d}{d\xi} \int_{-1}^1 (1 - (\xi' - \xi) \text{sign}(\xi' - \xi)) \frac{d\Theta(\xi')}{d\xi'} d\xi' = -1 \quad (23)$$

с граничными условиями

$$\Theta(-1) = \Theta(1) = 0. \quad (24)$$

Второе слагаемое в левой части уравнения (23) с учетом граничных условий (24) будет равно

$$\begin{aligned} p_2 \frac{d}{d\xi} \int_{-1}^1 (1 - (\xi' - \xi) \text{sign}(\xi' - \xi)) \frac{d\Theta(\xi')}{d\xi'} d\xi &= \\ = p_2 \left(\int_{\xi}^1 \frac{d\Theta(\xi')}{d\xi'} d\xi' - \int_{-1}^{\xi} \frac{d\Theta(\xi')}{d\xi'} d\xi' \right) &= -2p_2 \Theta(\xi). \end{aligned} \quad (25)$$

В результате вместо интегродифференциального уравнения (23) получим обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 \Theta(\xi)}{d\xi^2} - \frac{2p_2}{1-p_2} \Theta(\xi) = -\frac{1}{1-p_2},$$

решение которого с учетом граничных условий (24) имеет вид

$$\Theta^\circ(\xi) = \frac{1}{2p_2} \left(1 - \frac{\text{ch } \eta \xi}{\text{ch } \eta} \right), \quad \eta = \sqrt{\frac{2p_2}{1-p_2}} \quad \text{или} \quad T^\circ(\xi) = T_h + \frac{q_V^\circ h^2}{2p_2 \lambda} \left(1 - \frac{\text{ch } \eta \xi}{\text{ch } \eta} \right). \quad (26)$$

Следует отметить, что после предельного перехода при $p_2 \rightarrow 0$ это решение будет идентично равенству (21). С учетом (25) основной функционал (6) примет вид

$$J[\Theta] = \int_{-1}^1 \left(\frac{1-p_2}{2} \left(\frac{d\Theta(\xi)}{d\xi} \right)^2 + p_2(\Theta(\xi) - \Theta(\xi))^2 \right) d\xi. \quad (27)$$

Сопоставление представленных на рис. 1 распределений безразмерной температуры $\Theta(\xi)$ позволяет сделать вывод, что увеличение параметра p_2 приводит к возрастанию сопротивления материала пластины переносу тепловой энергии. Это вызывает как повышение температуры в средней плоскости пластины, так и увеличение на ее поверхности абсолютного значения проекции градиента температуры на нормаль к этой поверхности.

Перейдем к использованию двойственной вариационной модели применительно к рассматриваемой задаче. Для единственной отличной в рассматриваемом случае от нуля проекции q_ξ вектора \mathbf{q} , согласно (14), $dq_\xi(\xi)/d\xi =$

$= q_V^\circ h$. Из симметрии граничных условий (19) относительно средней плоскости пластины при $\xi = 0$ следуют условие $q_\xi(0) = 0$ и в результате равенство

$$q_\xi(\xi) = q_V^\circ h \xi. \quad (28)$$

Равенство (28) удовлетворяет дополнительным условиям (14) и (15) для выбора функций, допустимых при использовании функционала (17). Вектор \mathbf{q}^* также имеет единственную ненулевую проекцию. С учетом (2) и правила интегрирования по частям вычисление этой проекции приводит к равенству

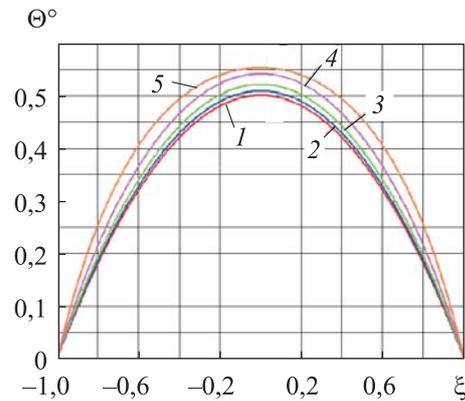


Рис. 1. Распределения безразмерной температуры $\Theta^\circ(\xi)$ при $p_2 = 0$ (1), 0,1 (2), 0,25 (3), 0,5 (4) и 0,75 (5)

$$\begin{aligned}
\frac{q_{\xi}^*(\xi)h}{\lambda} &= -\frac{dT^*(\xi)}{d\xi} = -\int_{-1}^1 (1 - (\xi' - \xi) \operatorname{sign}(\xi' - \xi)) \frac{dT(\xi')}{d\xi'} d\xi' = \\
&= \int_{\xi}^1 (\xi' - \xi) \frac{dT(\xi')}{d\xi'} d\xi' - \int_{-1}^{\xi} (\xi' - \xi) \frac{dT(\xi')}{d\xi'} d\xi' = \\
&= (\xi' - \xi) T(\xi') \Big|_{\xi'= \xi}^{\xi'= 1} - (\xi' - \xi) T(\xi') \Big|_{\xi'= -1}^{\xi'= \xi} - \int_{\xi}^1 T(\xi') d\xi' + \int_{-1}^{\xi} T(\xi') d\xi' = \\
&= -2\xi T_h - \int_{\xi}^1 (T(\xi') - T_h) d\xi' + \int_{-1}^{\xi} (T(\xi') - T_h) d\xi'. \quad (29)
\end{aligned}$$

Отсюда для решения задачи в виде последней формулы (26) получим

$$\frac{q_{\xi}^*(\xi)h}{\lambda} = \frac{Q}{p_2} \left(\xi - \frac{\operatorname{sh} \eta \xi}{\eta \operatorname{ch} \eta} \right), \quad (30)$$

где $Q = q_V^{\circ} h^2 / \lambda$.

Для рассматриваемого примера основной функционал (6) с учетом (2) и (22) переходом к безразмерной координате ξ и преобразованием, аналогичным использованному в (25), можно представить в виде

$$J_1[T] = \int_{-1}^1 \left(\frac{1-p_2}{2} \left(\frac{dT(\xi)}{d\xi} \right)^2 - p_2 T^2(\xi) - QT(\xi) \right) d\xi. \quad (31)$$

Вместо альтернативного функционала (17) в таком случае целесообразно использовать функционал (16), в котором также следует перейти к безразмерной координате ξ , а условия стационарности (14) и (15) использовать в качестве дополнительных. В результате с учетом равенств (2) и (29) альтернативный функционал будет зависеть лишь от допустимого распределения температуры $T(\xi)$ и примет вид

$$J_2^*[T, q_{\xi}] = J_1[T] - \frac{(h/\lambda)^2 / 2}{1-p_2} \int_{-1}^1 \left(q_V^{\circ} h \xi + \frac{1-p_2}{h} \lambda \frac{dT(\xi)}{d\xi} - p_2 q_{\xi}^* \right)^2 d\xi. \quad (32)$$

Если в подынтегральном выражении в соотношении (32) использовать решение рассматриваемой задачи в виде последней формулы (26) и равенство (30), то это выражение окажется равным нулю, что приводит к очевидному результату в виде совпадения значений основного и альтернативного функционалов на допустимой для них функции, соответствующей истинному распределению температуры в пластине. Из приведенных выкладок следует, что конкретное значение температуры T_h

не влияет на конечный результат, что далее позволяет принять $T_h = 0$. Для сравнения в качестве допустимой для функционалов (31) и (32) рассмотрим функцию $T_1(\xi) = BQ(1 - \xi^2)$, которая является решением рассматриваемой задачи при $p_2 = 0$, т. е. при отсутствии эффекта пространственной нелокальности. Для этой функции из равенства (30) при $T_h = 0$ следует

$$\frac{q_\xi^*(\xi)h}{\lambda} = -B \int_\xi^1 (1 - \xi^2) d\xi + B \int_{-1}^\xi (1 - \xi^2) d\xi = 2B \frac{\xi(3 - \xi^2)}{3}. \quad (33)$$

Подстановка функции $T_1(\xi)$ в (31) приводит к соотношению

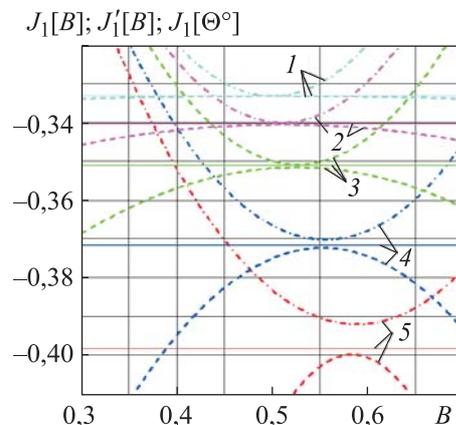
$$\begin{aligned} J_1[B] &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1 - p_2}{2} (2B\xi)^2 + p_2 (B(1 - \xi^2))^2 - QB(1 - \xi^2) \right) d\xi = \\ &= 4B \frac{B(5 - p_2) - 5Q}{15}, \end{aligned}$$

а в подынтегральное выражение (32) с учетом (33) — к соотношению

$$\Delta J[B] = \frac{1/2}{1 - p_2} \int_{-1}^1 \left(Q\xi - 2(1 - p_2)B\xi - 2p_2 B \frac{\xi(3 - \xi^2)}{3} \right)^2 d\xi.$$

Зависимости основного ($J_1[B]$) и альтернативного ($J'_1[B] = J_1[B] - \Delta J[B]$) функционалов от безразмерного значения коэффициента B при $Q = 1$ К и различных значениях p_2 приведены на рис. 2, ординаты горизонтальных прямых соответствуют минимальным значениям основного функционала (27). При $p_2 = 0$ минимальное ($J_1[B]$) и максимальное ($J'_1[B]$) значения функционала совпадают и равны минимальному значению функционала (27) на точном аналитическом решении рассматриваемой задачи, определяемом первой формулой (26). Это связано с тем, что функция $T_1(\xi)$

Рис. 2. Зависимости основного (штрихпунктирные) и альтернативного (штриховые) функционалов от коэффициента B и представленные ординатами минимальные значения $J[\Theta^\circ]$ функционала (27) (сплошные горизонтальные линии) на распределении $\Theta^\circ(\xi)$ безразмерной температуры при $p_2 = 0$ (1), 0,1 (2), 0,25 (3), 0,5 (4), 0,75 (5)



при $Q=1$ К и $T_h=0$ совпадает с точным решением задачи, определяемым последней формулой (26). При возрастании значения $p_2 > 0$ разность $\Delta J[B] = J_1[B] - J'_1[B]$ также увеличивается, причем абсолютное значение отклонения от минимального значения функционала $J[\Theta^\circ]$ у минимума функционала $J_1[B]$ остается меньше, чем у максимума функционала $J'_1[B]$.

При $Q=1$ К и различных значениях p_2 представлены безразмерные значения B и B' температуры, при которых основной и альтернативный функционалы достигают минимума и максимума соответственно, а также значения $\Theta^\circ(0)$, вычисленные с использованием первой формулы (26) и соответствующие ординатам на рис. 1 при $\xi=0$ (при $p_2 = 0$ $B = B' = \Theta^\circ(0) = 0,5$):

p_2	0,1	0,25	0,5	0,75
B	0,5112	0,5273	0,5539	0,5890
B'	0,5109	0,5261	0,5512	0,5831
$\Theta^\circ(0)$	0,5084	0,5210	0,5409	0,5524

Согласно полученным результатам, значение разности $\Delta B = B - B'$ непосредственно связано с разностью экстремальных значений основного и альтернативного функционалов. Значение ΔB_1 можно уменьшить подбором допустимой функции для обоих функционалов. В частности, в качестве такой функции можно использовать $T'_1(\xi) = B_1 Q(1 - \xi^2)^m$, подбирая для каждого фиксированного значения p_2 сочетание значений коэффициента B' и показателя степени $m \neq 1$, соответствующих наименьшей разности экстремальных значений основного ($J_1[B_1]$) и альтернативного ($J'_1[B_1]$) функционалов.

Заключение. Представленную двойственную вариационную формулировку математической модели процессов стационарной теплопроводности в области произвольной формы можно рассматривать как достаточно удобный инструмент для проведения приближенного анализа влияния на эти процессы эффектов пространственной нелокальности. Количественный анализ влияния этих эффектов с применением математических моделей, содержащих интегродифференциальные уравнения, связан с проведением большого объема расчетов, требующих использования значительных вычислительных ресурсов. В противоположность этому двойственная вариационная формулировка модели, содержащая основной и альтернативный функционалы в виде интегралов по рассматриваемой области и некоторым участкам ее поверхности, дает возможность за счет соответствующего выбора допустимой для этих функционалов функции,

которая описывает предполагаемое распределение температуры, установить количественную связь между параметрами, определяющими роль пространственной нелокальности при протекании установившегося процесса теплопроводности, а также оценить возникающую возможную погрешность расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Eringen A.C. Nonlocal continuum field theories. New York, NY, Springer, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1007/b97697>
- [2] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Математическая модель нелокальной среды с внутренними параметрами состояния. *Инженерно-физический журнал*, 2013, т. 86, № 4, с. 768–773.
- [3] Кувыркин Г.Н. Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993.
- [4] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики релаксирующего твердого тела. *Известия РАН. МТТ*, 2012, № 2, с. 114–124.
- [5] Shaata M., Ghavanloo E., Fazelzadeh S.A. Review on nonlocal continuum mechanics: physics, material applicability, and mathematics. *Mech. Mater.*, 2020, vol. 150, art. 103587. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103587>
- [6] Arash B., Wang Q. A review on the application of nonlocal elastic models in modeling of carbon nanotubes and graphenes. *Comput. Mater. Sci.*, 2012, vol. 51, no. 1, pp. 303–313. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2011.07.040>
- [7] Srinivasa A.R., Reddy J.N. An overview of theories of continuum mechanics with nonlocal elastic response and a general framework for conservative and dissipative systems. *Appl. Mech. Rev.*, 2017, vol. 69, iss. 3, art. 030802. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4036723>
- [8] Rafii-Tabar H., Ghavanloo E., Fazelzadeh S.A. Nonlocal continuum-based modeling of mechanical characteristics of nanoscopic structures. *Phys. Rep.*, 2016, vol. 638, pp. 1–97. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2016.05.003>
- [9] Kröner E. Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. *Int. J. Solid Struct.*, 1967, vol. 3, iss. 5, pp. 731–742. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(67\)90049-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(67)90049-2)
- [10] Eringen A.C. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *Int. J. Eng. Sci.*, 1972, vol. 10, iss. 5, pp. 425–435. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90050-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90050-X)
- [11] Eringen A.C., Edelen D.G.B. On nonlocal elasticity. *Int. J. Eng. Sci.*, 1972, vol. 10, iss. 3, pp. 233–248. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90039-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90039-0)
- [12] Jolley K., Gill S.P.A. Modelling transient heat conduction in solids at multiple length and time scales: a coupled non-equilibrium molecular dynamics/continuum approach. *J. Comput. Phys. Sci.*, 2009, vol. 228, iss. 19, art. 7412. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.06.035>

- [13] Cahill D., Ford W., Goodson K., et al. Nanoscale thermal transport. *J. Appl. Phys.*, 2003, vol. 93, iss. 2, art. 793. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1524305>
- [14] Jolley K., Gills S.P.A. Modeling transient heat conduction at multiple length and time scale: a coupled equilibrium molecular dynamics/continuum approach. In: Pyrz R., Rauhe J.C. (eds). *IUTAM Symposium on Modelling Nanomaterials and Nanosystems*. IUTAM Bookseries, vol. 13. Dordrecht, Springer, 2009, pp. 27–36. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9557-3_4
- [15] Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Математические модели нелокальной теплопроводности. *Тр.: Седьмая рос. нац. конф. по теплообмену*. Т. 3. М., МЭИ, 2018, с. 141–144.
- [16] Kuvyrkin G.N., Savelieva I.Yu., Kuvshinnikova D.A. One mathematical model of thermal conductivity for materials with granular structure. *Therm. Sci.*, 2019, vol. 23, no. suppl. 4, pp. S1273–S1280. DOI: <https://doi.org/10.2298/TSCI19S4273K>
- [17] Kuvyrkin G.N., Savelieva I.Yu., Kuvshinnikova D.A. Nonlocal thermodynamics: mathematical model two-dimensional thermal conductivity. *E3S Web Conf.*, 2021, vol. 321, art. 03005. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202132103005>
- [18] Савельева И.Ю. Вариационная формулировка математической модели процесса стационарной теплопроводности с учетом пространственной нелокальности. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 2 (101), с. 68–86. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-2-68-86>
- [19] Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. М., Энергоатомиздат, 1983.
- [20] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008.
- [21] Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.

Савельева Инга Юрьевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Савельева И.Ю. Двойственная вариационная модель стационарного процесса теплопроводности, учитывающая пространственную нелокальность. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 5 (104), с. 45–61. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-5-45-61>

DUAL VARIATIONAL MODEL OF A STEADY-STATE THERMAL CONDUCTIVITY PROCESS TAKING INTO ACCOUNT SPATIAL NON-LOCALITY

I.Yu. Savelyeva

inga.savelyeva@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

Microcontinuum theories boast a great potential for simulating structurally sensitive materials. There exists a sufficiently large number of works delineating the basics of non-local mechanics using the theory of elasticity as an example. Estimating the investigative capacity of non-local mechanics is at present particularly relevant to simulating nanodevices, nanoelectromechanical systems (NEMS), and media featuring complex internal micro- and nanostructures. Typically, analysing these simulations involves overcoming certain difficulties caused by the necessity to solve integro-differential equations numerically. Variational methods may be successfully applied to analysing mathematical models of continuous media as an additional tool. The paper describes plotting an alternative functional for the problem of steady-state thermal conductivity in a homogeneous body, taking into account non-locality effects and featuring a temperature-independent thermal conductivity coefficient. We show that the stationary conditions for this functional do not differ from those in the absence of non-locality. The alternative functional combined with the fundamental functional presented previously constitute a dual variational model. We quantitatively analyse the problem of an infinite planar plate featuring constantly active internal heat sources. The dual variational formulation of the problem allows us not only to obtain an approximate solution to the problem under consideration, but also to estimate its error, as well as to reduce this error by selecting other approximating functions if necessary

Keywords

Mathematical model, non-locality, dual variational formulation, functional

Received 15.06.2022

Accepted 08.07.2022

© Author(s), 2022

The study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. 0705-2020-0047)

REFERENCES

- [1] Eringen A.C. Nonlocal continuum field theories. New York, NY, Springer, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1007/b97697>
- [2] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Mathematical model of a nonlocal medium with internal state parameters. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2013, vol. 86, no. 4, pp. 820–826. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-013-0900-5>
- [3] Kuvyrkin G.N. Termomekhanika deformiruемого tverdogo tela pri vysokointensivnom nagruzhении [Thermal mechanics of a deformable solid body under high-intensity loading]. Moscow, BMSTU Publ., 1993.
- [4] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mathematical models of thermomechanics of a relaxing solid. *Mech. Solids*, 2012, vol. 47, no. 2, pp. 252–260. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654412020124>
- [5] Shaata M., Ghavanloo E., Fazelzadeh S.A. Review on nonlocal continuum mechanics: physics, material applicability, and mathematics. *Mech. Mater.*, 2020, vol. 150, art. 103587. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103587>
- [6] Arash B., Wang Q. A review on the application of nonlocal elastic models in modeling of carbon nanotubes and graphenes. *Comput. Mater. Sci.*, 2012, vol. 51, no. 1, pp. 303–313. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2011.07.040>
- [7] Srinivasa A.R., Reddy J.N. An overview of theories of continuum mechanics with nonlocal elastic response and a general framework for conservative and dissipative systems. *Appl. Mech. Rev.*, 2017, vol. 69, iss. 3, art. 030802. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4036723>
- [8] Rafii-Tabar H., Ghavanloo E., Fazelzadeh S.A. Nonlocal continuum-based modeling of mechanical characteristics of nanoscopic structures. *Phys. Rep.*, 2016, vol. 638, pp. 1–97. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2016.05.003>
- [9] Kröner E. Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. *Int. J. Solid Struct.*, 1967, vol. 3, iss. 5, pp. 731–742. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(67\)90049-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(67)90049-2)
- [10] Eringen A.C. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *Int. J. Eng. Sci.*, 1972, vol. 10, iss. 5, pp. 425–435. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90050-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90050-X)
- [11] Eringen A.C., Edelen D.G.B. On nonlocal elasticity. *Int. J. Eng. Sci.*, 1972, vol. 10, iss. 3, pp. 233–248. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90039-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90039-0)
- [12] Jolley K., Gill S.P.A. Modelling transient heat conduction in solids at multiple length and time scales: a coupled non-equilibrium molecular dynamics/continuum approach. *J. Comput. Phys. Sci.*, 2009, vol. 228, iss. 19, art. 7412. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.06.035>
- [13] Cahill D., Ford W., Goodson K., et al. Nanoscale thermal transport. *J. Appl. Phys.*, 2003, vol. 93, iss. 2, art. 793. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1524305>

[14] Jolley K., Gills S.P.A. Modeling transient heat conduction at multiple length and time scale: a coupled equilibrium molecular dynamics/continuum approach. In: Pyrz R., Rauhe J.C. (eds). *IUTAM Symposium on Modelling Nanomaterials and Nanosystems*. IUTAM Bookseries, vol. 13. Dordrecht, Springer, 2009, pp. 27–36.

DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9557-3_4

[15] Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu. [Mathematical models of nonlocal thermal conductivity]. *Tr. Sedmaya ros. nats. konf. po teploobmenu. T. 3* [Proc. 7th Russ. National Conf. on Heat Transfer. Vol. 3]. Moscow, MPEI Publ., 2018, pp. 141–144 (in Russ.).

[16] Kuvyrkin G.N., Savelieva I.Yu., Kuvshinnikova D.A. One mathematical model of thermal conductivity for materials with granular structure. *Therm. Sci.*, 2019, vol. 23, no. suppl. 4, pp. S1273–S1280. DOI: <https://doi.org/10.2298/TSCI19S4273K>

[17] Kuvyrkin G.N., Savelieva I.Yu., Kuvshinnikova D.A. Nonlocal thermodynamics: mathematical model two-dimensional thermal conductivity. *E3S Web Conf.*, 2021, vol. 321, art. 03005. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202132103005>

[18] Savelyeva I.Yu. Variational formulation of the mathematical model of stationary heat conduction with account for spatial nonlocality. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 2 (101), pp. 68–86 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-2-68-86>

[19] Zarubin V.S. *Inzhenernye metody resheniya zadach teploprovodnosti* [Engineering methods for solving heat transfer problems]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983.

[20] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, BMSTU Publ., 2008.

[21] Vlasova E.A., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Priblizhennyye metody matematicheskoy fiziki* [Approximate methods of mathematical physics]. Moscow, BMSTU Publ., 2004.

Savelyeva I.Yu. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Savelyeva I.Yu. Dual variational model of a steady-state thermal conductivity process taking into account spatial non-locality. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 5 (104), pp. 45–61 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-5-45-61>