

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТЕПЛОВЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ

**В.Ф. Формалев**

**Б.А. Гарибян**

**С.А. Колесник**

formalev38@yandex.ru

bagarib@yandex.ru

sergey@oviont.com

**МАИ, Москва, Российская Федерация**

---

### **Аннотация**

Проведено математическое моделирование теплопереноса в локально-неравновесной среде с характеристиками переноса, зависящими от распределения температуры. Нелинейность тепло- и теплопроводности принята в виде однородного многочлена произвольной степени. Математическая модель представлена в виде нелинейного волнового уравнения теплопереноса гиперболического типа, начальных условий и нелинейного граничного условия второго и первого рода. Для решения поставленной задачи использована консервативная, однородная конечно-разностная схема на верхнем временном слое (неявно). Полученная система линеаризованных алгебраических уравнений решается методом прогонки со вторым порядком по пространственной переменной и первым — по времени. Граничные условия первого и второго рода представляют собой периодическую череду прямоугольных импульсов температуры или теплового потока. Результаты расчетов показывают конечную скорость распространения температурного и теплового фронтов с ярко выраженными разрывами непрерывности первого рода с затухающей амплитудой. При этом первые импульсы нагревают область между границей и передним фронтом тепловой волны, а последующие проходят эту область с большей скоростью за счет зависимости теплопроводности от температуры, их передние фронты «догоняют» предыдущие фронты, увеличивая амплитуду разрыва переднего фронта первого импульса, т. е. образуется перед-

### **Ключевые слова**

*Теплопроводность, теплопроводность, время релаксации, нелинейная локально-неравновесная среда, волновое уравнение теплопереноса, периодический теплообмен, амплитуды разрывов фронтов тепловых волн, тепловая ударная волна, скорости разрывов первого рода, амплитуды разрывов первого рода*

ний фронт тепловой ударной волны по аналогии с ударной волной в газовой динамике. Такие ударные тепловые волны получены для граничных условий как первого, так и второго рода. Проанализированы кинематические и динамические характеристики тепловых волн

Поступила 31.01.2022

Принята 24.02.2022

© Автор(ы), 2022

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 22-21-00776)*

**Введение.** В условиях существенной нестационарности нагрева, например, при запуске ядерных реакторов, при входе в плотные слои атмосферы летательных аппаратов (ЛА) с гиперзвуковыми скоростями, в релятивистской механике, при образовании лазерной плазмы и т. п. наблюдаются высокие скорости нагрева изделий в течение очень малого времени. В таких условиях возникающие температурные поля в телах не подчиняются классическому закону Фурье [1, 2], приводящему к парадоксу бесконечной скорости распространения теплового потока в теле, что является следствием гипотезы о сплошности среды и диффузионном характере распространения теплоты. Физическая основа такой ситуации — термомеханическое и тепловое состояние среды [3, 4].

Для исключения указанного парадокса П. Верноттом (P. Vernott), К. Каттанео (C. Cattaneo) и А.В. Лыковым предложена гипотеза не только о диффузионном, но и о волновом характере распространения теплоты в условиях существенной нестационарности. В соответствии с ней к градиентному закону Фурье добавлено слагаемое, пропорциональное скорости изменения теплового потока, в котором коэффициентом пропорциональности является время релаксации — время отставания теплового потока от градиента температуры, связанное с дискретностью среды на микроуровне. В результате получен закон Вернотта — Каттанео — Лыкова [5, 6]:

$$\mathbf{q}(M, t) = -\lambda \operatorname{grad} T(M, t) - \tau_r \frac{\partial \mathbf{q}(M, t)}{\partial t},$$

где  $\mathbf{q}$  — плотность вектора теплового потока;  $T$  — температура;  $\tau_r$  — время релаксации.

Уравнение теплопереноса на основе этого закона имеет волновой характер и является уравнением гиперболического типа:

$$\tau_r \frac{\partial^2 T(M, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = \operatorname{div} (a(T) \operatorname{grad} T(M, t)).$$

Решение начально-краевых задач на основе приведенного уравнения в аналитическом виде получено в [7–9].

В последнее время, на основе обобщенного уравнения переноса субстанций Онзагера (L. Onsager) [10–12] получен закон теплопереноса с двухфазным запаздыванием (dual-phase lag):

$$\mathbf{q}(M, t) = -\lambda \operatorname{grad} T(M, t) - \tau_r \frac{\partial \mathbf{q}(M, t)}{\partial t} - \lambda \tau_T \operatorname{grad} \frac{\partial T(M, t)}{\partial t},$$

в котором второе слагаемое в правой части характеризует запаздывание теплового потока относительно градиента температуры, а третье — пространственное запаздывание теплового потока путем демпфирования градиента температуры с коэффициентом демпфирования  $\tau_T$ . С учетом этого закона уравнение теплопереноса в линейном случае имеет вид, приведенный в [13, 14]. Пространственное запаздывание связано с демпфированием градиента температуры в какой-либо точке тела частицами, окружающими это тело с временем релаксации  $\tau_r$ :

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta \left[ T(M, t) + \tau_T \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} \right] - \tau_r \frac{\partial^2 T(M, t)}{\partial t^2},$$

называемое уравнением теплопереноса с двухфазным запаздыванием.

Результаты исследования волнового теплопереноса с учетом поглощения приведены в [15], интенсивного теплообмена при полете ЛА в плотных слоях атмосферы с гиперзвуковыми скоростями — в [16, 17], что также приводит к волновому теплопереносу в корпусах ЛА.

В настоящей работе моделируется волновой теплоперенос в нелинейном полубесконечном стержне в условиях периодического температурного и теплового нагрева. Зависимость теплопроводности от температуры в виде функции однородного многочлена произвольной степени — причина трансформации тепловых волн в тепловые ударные волны, существование которых предсказано в [2]. Эти ударные волны являются следствием уплотнения разрывов непрерывности первого рода (амплитуд разрывов на передних фронтах тепловых волн).

**Постановка задачи.** В полубесконечном стержне, теплопроводность которого зависит от температуры, рассматривается первая и вторая начально-краевые задачи для волнового уравнения теплопроводности:

$$\tau_r \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{c\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_0 T^\sigma \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right], \quad x > 0, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0, \quad x \geq 0, \quad t = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad x \geq 0, \quad t = 0; \quad (3)$$

$$T(0, t) = T_w \varphi(t), \quad x = 0, \quad (4)$$

или

$$\lambda_0 T^\sigma \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = q_w \varphi(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \quad (5)$$

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^N 2^{n-1} [\eta(t - (nd_1 + (n-1)d_2) + d_1) - \eta(t - n(d_1 + d_2) + d_1)], \quad (6)$$

где  $\lambda_0$  — теплопроводность при начальной температуре  $T_0$ ,  $[\lambda_0] = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \frac{1}{\text{К}^\sigma}$ ;  $\lambda_0 T^\sigma$  — нелинейная теплопроводность;  $\sigma > 0$  — вещественный показатель;  $c$  — теплоемкость,  $[c] = \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ;  $\rho$  — плотность,  $[\rho] = \text{кг}/\text{м}^3$ ;  $x$  — пространственная переменная,  $[x] = \text{м}$ ;  $t$  — время,  $[t] = \text{с}$ ;  $T$  — температура,  $[T] = \text{К}$ ;  $q_w$  — плотность теплового потока в момент  $t = +0$ ,  $[q_w] = \text{Вт}/\text{м}^2$ ;  $\eta(t - t_n)$  — функция Хевисайда,  $\eta = 1$  при  $t - t_n \geq 0$  и  $\eta = 0$  при  $t - t_n < 0$ ;  $T_w$  — температура на границе  $x = 0$  при  $t = +0$ ;  $d_2$  — длительность импульса;  $d_1$  — интервал по времени между импульсами,  $[d_2] = [d_1] = \text{с}$ .

Замыкают систему (1)–(6) условия на бесконечности

$$T(\infty, t) = T_0, \quad \partial T(\infty, t)/\partial x = 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Таким образом, задача (1)–(4), (6), (7) — первая начально-краевая задача волнового теплопереноса в нелинейном локально-неравновесном (наличие времени  $\tau_r$ ) одномерном полупространстве с периодическим температурным нагревом (4), (6), (7) прямоугольными импульсами температуры, при этом каждый импульс действует в течение времени  $d_2$  с промежутками между импульсами, равными  $d_1$ . Каждый последующий импульс по амплитуде в 2 раза превышает предыдущий, что соответствует физическим представлениям постепенного нарастания температуры и теплоты на границе  $x = 0$ .

Задача (1)–(3), (5)–(7) — вторая начально-краевая задача волнового теплопереноса в нелинейном локально-неравновесном полупространстве с периодическим нагревом (5), (6) тепловыми прямоугольными импульсами с теми же геометрическими характеристиками.

**Метод решения.** Поскольку время релаксации  $\tau_r$  мало ( $\tau_r = 10^{-12} \dots 10^{-6}$  с для различных материалов), общее время  $t$  пропорционально времени релаксации и, следовательно, глубина прогрева имеет порядок нанометров, целесообразно привести задачу (1)–(7) к безразмерному

виду, для чего введем безразмерные характеристики времени, пространственной переменной и температуры:

$$\bar{t} = \frac{t}{\tau_r}; \quad \bar{x} = \frac{x\sqrt{c\rho}}{\sqrt{\lambda_0 T_0^\sigma \tau_r}}; \quad \bar{T} = \frac{T_0}{T - T_0}.$$

С учетом этих характеристик нелинейное граничное условие (5) в безразмерном виде запишется как

$$(\bar{T} + 1)^\sigma \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{q_w}{T_0} \sqrt{\frac{\tau_r}{\lambda_0 c \rho T_0^\sigma}} \varphi(\bar{t}), \quad \bar{x} = 0, \quad \bar{t} > 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} T^\sigma &= T_0^\sigma \left( \frac{T - T_0 + T_0}{T_0} \right)^\sigma = T_0^\sigma (\bar{T} + 1)^\sigma; \\ \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} &= \lambda_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda_0 T_0^\sigma (\bar{T} + 1)^\sigma \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} T_0 \frac{\tau_r}{\tau_r} \frac{c\rho}{c\rho} = \\ &= \left( \sqrt{\frac{\lambda_0 \tau_r T_0^\sigma}{c\rho}} \right)^2 (\bar{T} + 1) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} T_0 \frac{c\rho}{\tau_r} = \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_0 \tau_r T_0^\sigma}{c\rho}} T_0 \frac{c\rho}{\tau_r} (\bar{T} + 1)^\sigma \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = (\bar{T} + 1)^\sigma \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} \sqrt{\frac{\lambda c \rho T_0^\sigma}{\tau_r}} T_0. \end{aligned}$$

Задача (1)–(7) в безразмерном виде будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{T}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial \bar{T}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ (\bar{T} + 1)^\sigma \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} \right], \quad \bar{x} > 0, \quad \bar{t} > 0; \quad (8)$$

$$\bar{T}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{x} \geq 0, \quad \bar{t} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{T}(\bar{x}, 0)}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \bar{x} \geq 0, \quad \bar{t} = 0; \quad (10)$$

$$\bar{T}(0, \bar{t}) + 1 = (\bar{T}_w + 1) \varphi(\bar{t}), \quad \bar{x} = 0, \quad \bar{t} > 0, \quad (11)$$

или

$$(\bar{T} + 1)^\sigma \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{q_w}{T_0} \sqrt{\frac{\tau_r}{\lambda_0 T_0^\sigma c \rho}} \varphi(\bar{t}), \quad \bar{x} = 0, \quad \bar{t} > 0; \quad (12)$$

$$\varphi(\bar{t}) = \sum_{n=1}^N 2^{n-1} \left[ \eta(\bar{t} - (n\bar{d}_1 + (n-1)\bar{d}_2) + \bar{d}_1) - \eta(\bar{t} - n(\bar{d}_1 + \bar{d}_2) + \bar{d}_1) \right]; \quad (13)$$

$$\bar{T}(\infty, \bar{t}) = 0, \quad \partial \bar{T}(\infty, \bar{t}) / \partial \bar{x} = 0, \quad \bar{x} \rightarrow \infty, \quad \bar{t} \geq 0. \quad (14)$$

Для численного решения ограничим стержень длиной  $l$  ( $\bar{l} = l\sqrt{c\rho} / \sqrt{\lambda_0 T_0^\sigma \tau_r}$ ), где длина  $l$  такая, что за время  $\bar{t}$  тепловые и температурные возмущения оставались нулевыми. Тогда на область  $[0, \bar{l}] \times [0, \bar{t}]$  нанесем пространственно-временную сетку

$$\omega_{h\tau} = \left\{ \bar{x}_j = jh, j = \overline{0, J}, J = \bar{l} / h; \bar{t}^k = k\tau, k = \overline{0, K}, K = \bar{t} / \tau \right\}, \quad (15)$$

где  $h, \tau$  безразмерны; сеточные функции температуры  $\bar{T}_j^k = \bar{T}(\bar{x}_j, \bar{t}^k)$  на нижнем временном слое  $\bar{t}^k$ ,  $\bar{T}_j^{k+1} = T(\bar{x}_j, \bar{t}^{k+1})$  на верхнем временном слое  $\bar{t}^{k+1}$ . На сетке (15) будем аппроксимировать первую и вторую начально-краевые задачи (8)–(14) с использованием отношения конечных разностей с линеаризацией теплопроводности путем разложения в ряд Тейлора по степеням  $\Delta \bar{T}^k$  в окрестности значения  $T^k$  с удержанием линейных членов ( $\Delta \bar{T}^k = \bar{T}^k - \bar{T}^{k-1}$ ):

$$\bar{\lambda}_j^{k+1} = (\bar{T}_j^{k+1} + 1)^\sigma = (\bar{T}_j^k + 1)^k + \sigma (\bar{T}_j^k + 1)^{\sigma-1} (\bar{T}_j^k - \bar{T}^{k-1}) + O(\tau).$$

Дифференциальные операторы по времени и пространственной переменной аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} &= \frac{\bar{T}_j^{k+1} - \bar{T}_j^{k-1}}{2\tau} + O(\tau^2), \quad j = \overline{0, J}, k = \overline{2, K}; \\ \frac{\partial^2 \bar{T}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}^2} &= \frac{\bar{T}_j^{k+1} - 2\bar{T}_j^k + \bar{T}_j^{k-1}}{\tau^2} + O(\tau^2), \quad j = \overline{0, J}; k = \overline{2, K}; \\ & \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ (\bar{T} + 1)^\sigma \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} \right] = \\ &= \frac{1}{h} \left[ \frac{\bar{\lambda}_{j+1}^{k+1} + \bar{\lambda}_j^{k+1}}{2} \frac{\bar{T}_{j+1}^{k+1} - \bar{T}_j^{k+1}}{h} - \frac{\bar{\lambda}_j^{k+1} + \bar{\lambda}_{j-1}^{k+1}}{2} \frac{\bar{T}_j^{k+1} - \bar{T}_{j-1}^{k+1}}{h} \right] + O(h^2 + \tau), \quad (16) \\ & j = \overline{1, J-1}, k = \overline{2, K-1}. \end{aligned}$$

Поскольку на границе  $\bar{x} = 0$  в конечно-разностной аппроксимации граничного условия второго рода (12) возникают наибольшие погрешности, необходимо первую производную по переменной  $\bar{x}$  аппроксимировать со вторым порядком по пространственной переменной и одновре-

менно соблюсти консервативность конечно-разностной схемы. Для этого вводится предположение о существовании на границе  $\bar{x} = 0$  второй производной  $\partial^2 \bar{T} / \partial \bar{x}^2$ , что позволяет приграничное значение  $\bar{T}(\bar{x}_1, \bar{t}^{k+1}) \equiv \equiv T_1^{k+1}$  разложить в ряд Тейлора по степеням  $h$  в окрестности  $\bar{x} = 0$  до второй производной включительно:

$$\bar{T}_1^{k+1} = \bar{T}(0+h, \bar{t}^{k+1}) = \bar{T}_0^{k+1} + \frac{\partial \bar{T}_0^{k+1}}{\partial \bar{x}} h + \frac{\partial^2 \bar{T}_0^{k+1}}{\partial \bar{x}^2} \frac{h^2}{2} + O(h^3),$$

из которого первая производная определяется со вторым порядком  $O(h^2)$ :

$$\frac{\partial \bar{T}_0^{k+1}}{\partial \bar{x}} = \frac{\bar{T}_1^{k+1} - \bar{T}_0^{k+1}}{h} - \frac{\partial^2 \bar{T}_0^{k+1}}{\partial \bar{x}^2} \frac{h}{2} + O(h^2). \quad (17)$$

Вторую производную вычислим с использованием дифференциального уравнения (8)

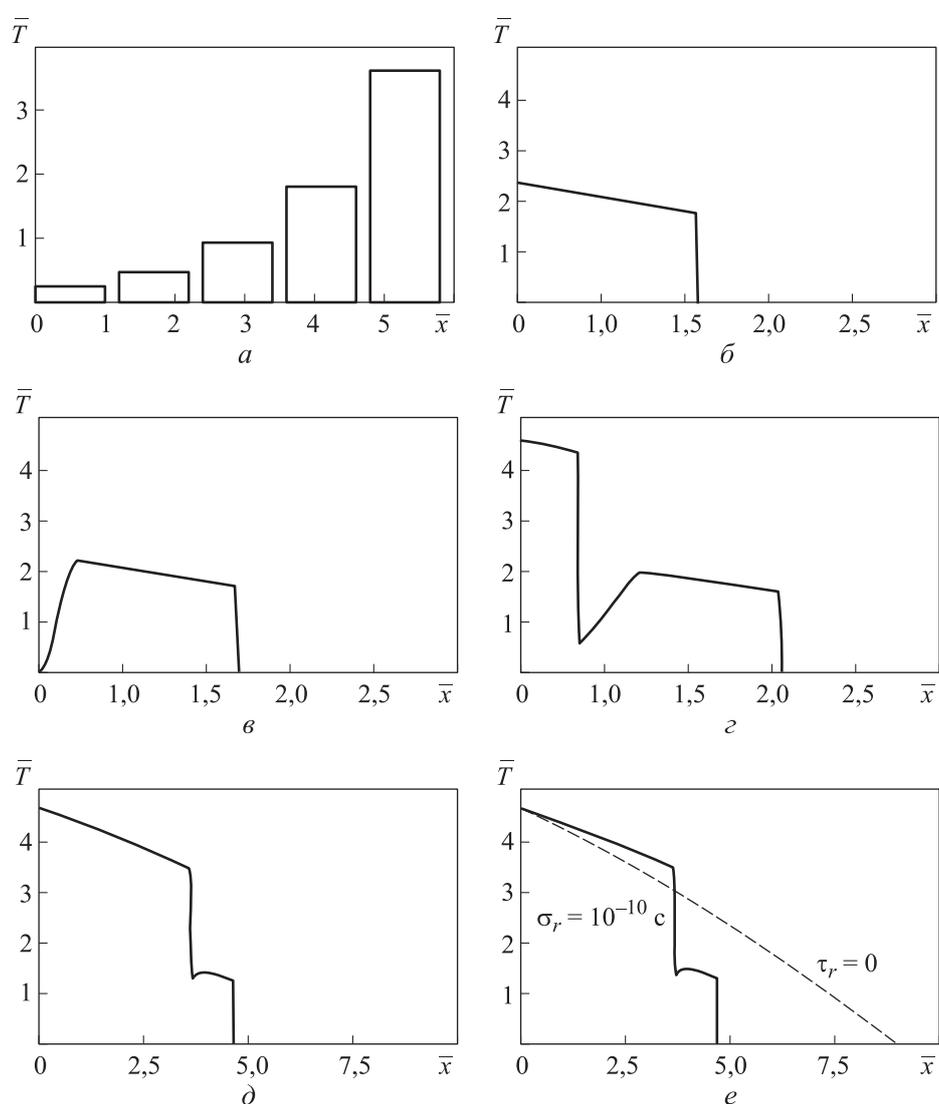
$$\frac{\partial^2 \bar{T}_0^{k+1}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{1}{(\bar{T}_0^k + 1)^\sigma} \left[ \frac{\partial^2 \bar{T}_0^{k+1}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial \bar{T}_0^{k+1}}{\partial \bar{t}} - \left( \sigma (\bar{T}_0^k + 1)^{\sigma-1} \frac{\partial \bar{T}_0^k}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial \bar{T}_0^{k+1}}{\partial \bar{x}} \right].$$

Подставляя это выражение в (17), получаем значение  $\partial \bar{T}_0^{k+1} / \partial \bar{x}$  со вторым порядком  $O(h^2)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{T}_0^{k+1}}{\partial \bar{x}} \left( 1 - \frac{\sigma h}{2(\bar{T}_0^{k+1})} \frac{\partial \bar{T}_0^k}{\partial \bar{x}} \right) = \\ & = \frac{\bar{T}_1^{k+1} - \bar{T}_0^{k+1}}{h} - \frac{h}{2(\bar{T}_0^k + 1)^\sigma} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}_0^{k+1}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial \bar{T}_0^{k+1}}{\partial \bar{t}} \right) + O(\tau + h^2). \end{aligned} \quad (18)$$

Производные второго и первого порядков по времени аппроксимируются с помощью первых двух выражений в (16). Подставляя  $\partial \bar{T}_0^{k+1} / \partial \bar{x}$  из (18) в (12), получаем конечно-разностную аппроксимацию теплового потока на границе  $\bar{x} = 0$  с двумя неизвестными  $\bar{T}_1^{k+1}$  и  $\bar{T}_0^{k+1}$  со вторым порядком по пространственной переменной и первым — по переменной времени:  $O(\tau + h^2)$ . Полученная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей решается методом прогонки относительно температуры  $\bar{T}_0^{k+1}, \bar{T}_1^{k+1}, \dots, \bar{T}_j^{k+1}$  на верхнем временном слое  $\bar{t}^{k+1}$  по их значениям на нижних временных слоях  $\bar{t}^{k-1}, \bar{t}^k$ .

**Результаты расчетов и их обсуждение.** Результаты численных расчетов волнового теплопереноса первой начально-краевой задачи для уравнения (8) приведены на рис. 1, второй начально-краевой задачи для того же уравнения — на рис. 2. Входные данные:  $\tau_r = 10^{-10}$  с;  $T_0 = 300$  К;  $T_w = 1000$  К;  $\sigma = 1$ . Для первой краевой задачи:  $\lambda_0 T^\sigma / (c\rho) = 1,4 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с;  $d_2 = 10^{-10}$  с;  $d_1 = 2 \cdot 10^{-11}$  с; сеточные характеристики  $\tau = 10^{-13}$  с;  $h = 10^{-8}$  м. Для второй краевой задачи:  $q_w = 10^5$  Вт/м<sup>2</sup>;  $\lambda_0 T^\sigma / (c\rho) = 5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с;  $d_2 = 10^{-10}$  с;  $d_1 = 0,5 \cdot 10^{-10}$  с.



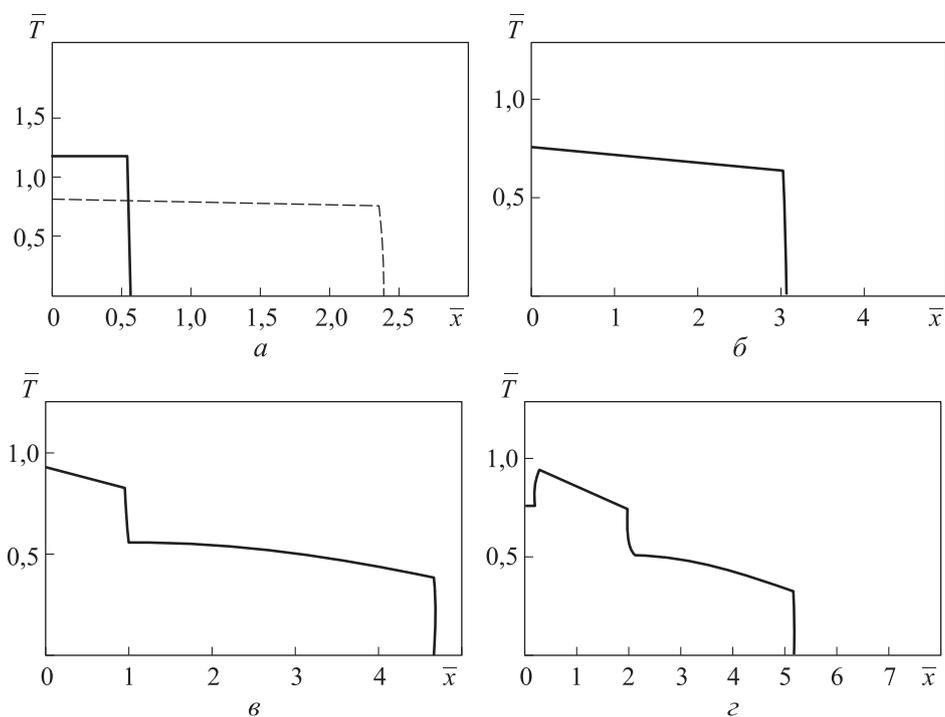
**Рис. 1.** Импульсное граничное условие первого рода и динамика возникновения и распространения тепловых ударных волн от первых импульсов

Зависимость периодических температурных импульсов, действующих на границе  $x = 0$ , от безразмерного времени  $\bar{t} = t / \tau_r$  приведена на рис. 1, а, тепловая волна от первого температурного импульса с амплитудой  $(1000 \text{ К} - 300 \text{ К}) / 300 \text{ К} = 2,33$  в виде затухающего температурного профиля по безразмерной пространственной переменной  $\bar{x} = x\sqrt{c\rho} / \sqrt{\lambda_0 T_0^\sigma \tau_r}$  с разрывом непрерывности первого рода, причем значению  $\bar{x} = 1$  соответствует  $x = 4 \cdot 10^{-6}$  м, показана на рис. 1, б.

Первый импульс продвигается в глубь тела так, что левая граница первого импульса в теле выходит на границу  $\bar{x} = 0$ , промежуток от  $\bar{x} = 0$  до  $\bar{x} = \bar{d}_1$  находится при нулевой температуре (рис. 1, в). В то время, когда левая граница первого импульса продвинулась на расстояние  $\bar{d}_1$  в тело входит второй импульс с амплитудой, увеличенной в 2 раза (рис. 1, з). При этом первая тепловая волна продолжает движение в глубь тела с диссипацией тепловой энергии. В распределении температуры наблюдается провал, вызванный нулевым значением температуры между двумя изолированными импульсами. Наличие нелинейной теплопроводности, зависящей от возрастающей температуры, позволяет второму импульсу двигаться по нагретому первым импульсом промежутку с большей скоростью, чем первый импульс. Поэтому температурный профиль от второго импульса быстро накладывается на температурный профиль от первого импульса.

Распределение температуры от первых трех импульсов показано на рис. 1, д, причем температурные профили от второго и третьего импульсов ложились на профиль от первого, образуя волну с суммарной амплитудой и суммарной амплитудой переднего фронта, т. е. возникает тепловая ударная волна, продвигающаяся в глубь тела (аналогия газодинамической ударной волны). Для сравнения на рис. 1, е приведено распределение температуры в случае отсутствия релаксационных явлений ( $\tau_r = 0$ ), т. е. теплопроводность учитывается по нелинейному закону Фурье (штриховая линия). Отличие качественное и количественное, однако фронт волны за счет только нелинейности существует в точке пересечения штриховой линии с осью абсцисс, где наблюдается разрыв производной температуры по пространственной переменной.

Скачок температуры от первого теплового импульса на границе  $\bar{x} = 0$  (сплошная линия) и распределение температуры (штриховая линия) в течение времени действия первого импульса с гораздо меньшей амплитудой за счет зависимости теплопроводности от температуры, так как  $d\lambda(T)/dT > 0$ , показаны на рис. 2, а.



**Рис. 2.** Динамика возникновения и распространения тепловых ударных волн от первых импульсов граничного условия второго рода

Действия второго и третьего импульсов аналогичны показанному на рис. 1 для первой начально-краевой задачи, только температура границы  $\bar{x} = 0$  значительно ниже, поскольку является следствием действия на границу теплового потока, а не температуры, (см. рис. 1). Здесь также происходит уплотнение (увеличение) амплитуды температуры от предыдущих импульсов за счет наложения на них температуры от последующих импульсов.

Распределение температуры от первого и второго импульсов показано на рис. 2, б, распределение температуры от первых трех импульсов теплового потока — на рис. 2, в. Продвижение тепловой волны от первых трех импульсов теплового потока за время до момента появления четвертого импульса (наблюдается просадка температуры) представлено на рис. 2, г.

Итак, имеет место увеличение амплитуды тепловой волны, т. е. возникает тепловая ударная волна. Этот анализ позволил выявить механизм возникновения тепловой ударной волны в нелинейных локально-неравновесных средах (наличие релаксационных явлений).

**Выводы.** Поставлена задача о волновом теплопереносе в нелинейных локально-неравновесных средах, имеющих место при высоких скоростях нагрева в условиях отставания тепловых потоков от градиентов темпера-

туры. Математические модели учитывают периодические нагревы температурой (граничное условие первого рода) и тепловым потоком (вторая начально-краевая задача).

Представленные в безразмерном виде обе математические модели решены численно с использованием метода прогонки, причем линеаризация нелинейной теплопроводности осуществлена путем разложения в ряд Тейлора теплопроводности на верхнем слое в окрестности температуры на нижнем временном слое с удержанием линейных членов.

Выявлен механизм возникновения и продвижения в глубь тела тепловых ударных волн в виде накладывающихся друг на друга локальных температурных импульсов с ярко выраженными разрывами непрерывности первого рода. Это наложение является следствием нелинейности среды, вследствие чего последующие волны, двигаясь по уже нагретой области со значительно большей скоростью, «догоняют» предыдущие импульсы, увеличивая амплитуды головной волны и амплитуды разрыва непрерывности на переднем фронте, т. е. возникает тепловая ударная волна.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лыков А.В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена. *Инженерно-физический журнал*, 1965, т. 9, № 3, с. 287–304.
- [2] Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса. *УФН*, 1997, т. 167, № 10, с. 1095–1106. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199710f.1095>
- [3] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математическое моделирование термомеханических процессов при интенсивном тепловом воздействии. *ТВТ*, 2003, т. 41, № 2, с. 300–309.
- [4] Зарубин В.С., Леонов В.В., Зарубин В.С., мл. Температурное состояние анизотропного шарового слоя при конвективном теплообмене с окружающей средой. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2019, № 4 (85), с. 40–55. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2019-4-40-55>
- [5] Лыков А.В. Теплообмен. М., Энергия, 1978.
- [6] Шашков А.Г., Бубнов А.В., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности. М., Едиториал УРСС, 2004.
- [7] Формалев В.Ф., Карташов Э.М., Колесник С.А. О динамике движения и отражения температурных солитонов при волновом теплопереносе в ограниченных областях. *Инженерно-физический журнал*, 2020, т. 93, № 1, с. 11–17.
- [8] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Волновой теплоперенос в ортотропном полупространстве под действием нестационарного точечного источника тепловой энергии. *ТВТ*, 2018, т. 56, № 5, с. 756–760. DOI: <https://doi.org/10.31857/S004036440003371-2>

- [9] Формалев В.Ф., Карташов Э.М., Колесник С.А. Моделирование неравновесного теплопереноса в анизотропном полупространстве под воздействием точечного источника теплоты. *Инженерно-физический журнал*, 2019, т. 92, № 6, с. 2585–2594.
- [10] Карташов Э.М. Математические модели теплопроводности с двухфазным запаздыванием. *Инженерно-физический журнал*, 2016, т. 89, № 2, с. 338–349.
- [11] Sobolev S.L. Discrete space-time model for heat conduction: application to size dependent thermal conductivity in nano-films. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2017, vol. 108, part A, pp. 933–939. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.12.051>
- [12] Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V., et al. Strongly nonequilibrium model of thermal ignition with account for space-time nonlocality. *Combust. Explos. Shock Waves*, 2018, vol. 54, no. 6, pp. 649–653. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0010508218060035>
- [13] Кирсанов Ю.А. Влияние тепловой релаксации и термического демпфирования на переходные процессы при циклических граничных условиях. *ТВТ*, 2017, т. 55, № 4, с. 549–555.
- [14] Kudinov I.V., Eremin A.V., Kudinov V.A., et al. Mathematical model of damped elastic rod oscillations with dual-phase-lag. *Int. J. Solids Struct.*, 2020, vol. 200-201, pp. 231–241. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.05.018>
- [15] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Гарибян Б.А. Теплоперенос с поглощением в анизотропной тепловой защите высокотемпературных изделий. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2019, № 5 (86), с. 35–49. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2019-5-35-49>
- [16] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Гарибян Б.А. Аналитическое решение задачи о сопряженном теплообмене между газодинамическим пограничным слоем и анизотропной полосой. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2020, № 5 (92), с. 44–59. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2020-5-44-59>
- [17] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Гарибян Б.А. Математическое моделирование теплопереноса при аэродинамическом нагреве носовых частей гиперзвуковых летательных аппаратов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 1 (100), с. 107–121. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2022-1-107-121>

**Формалев Владимир Федорович** — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и программирование» МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4).

**Гарибян Борис Александрович** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическая кибернетика» МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4).

**Колесник Сергей Александрович** — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и программирование» МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Формалев В.Ф., Гарибян Б.А., Колесник С.А. Математическое моделирование динамики тепловых ударных волн в нелинейных локально-неравновесных средах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 4 (103), с. 80–94. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-4-80-94>

**MATHEMATICAL SIMULATION OF THERMAL SHOCK WAVE DYNAMICS IN NONLINEAR LOCAL NON-EQUILIBRIUM MEDIA**

**V.F. Formalev**  
**B.A. Garibyan**  
**S.A. Kolesnik**

formalev38@yandex.ru  
bagarib@yandex.ru  
sergey@oviont.com

**Moscow Aviation Institute (National Research University),  
Moscow, Russian Federation**

---

**Abstract**

We performed a mathematical simulation of heat transfer in a local non-equilibrium medium whose transfer characteristics are functions of the temperature distribution. A homogeneous polynomial of arbitrary degree represents nonlinearities in thermal conductivity and thermal diffusivity. The mathematical model consists of a hyperbolic nonlinear heat transfer wave equation, initial conditions and nonlinear boundary conditions of the second and first kind. To solve this problem, we used a conservative homogeneous finite-difference scheme along the upper time grid line (implicitly). We then used the tridiagonal matrix algorithm of the second order in the spatial variable and of the first order in time to solve the resulting system of linearised algebraic equations. A periodic series of rectangular temperature or heat flux pulses form the boundary conditions of the first and second kind. Computation results reveal ultimate propagation rates of temperature and heat fronts featuring pronounced first-kind discontinuities with attenuating magnitudes. As the process unfolds, the initial pulses heat the region between the boundary and the heat wave front, while the subsequent pulses traverse this region at a higher velocity due to thermal diffusivity being a function of temperature, their fronts “catching up” with the previous fronts, increasing the discontinuity magnitude at the initial pulse front, that is, forming a thermal shock wave front

**Keywords**

*Thermal conductivity, thermal diffusivity, relaxation time, nonlinear local non-equilibrium medium, heat transfer wave equation, periodic heat transfer, thermal wave front discontinuity magnitudes, thermal shock wave, first-kind discontinuity velocities, first-kind discontinuity magnitudes*

similar to that of a shock wave in gas dynamics.

We obtained such thermal shock waves for boundary conditions of both the first and the second kind.

We also analysed kinematic and dynamic characteristics of thermal waves

Received 31.01.2022

Accepted 24.02.2022

© Author(s), 2022

---

*The study was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 22-21-00776)*

## REFERENCES

- [1] Lykov A.V. Using methods of irreversible processes thermodynamics for study on heat and mass transfer. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 1965, vol. 9, no. 3, pp. 287–304 (in Russ.).
- [2] Sobolev S.L. Local non-equilibrium transport models. *Phys. Usp.*, 1997, vol. 40, no. 10, pp. 1043–1053. DOI: <https://doi.org/10.1070/PU1997v040n10ABEH000292>
- [3] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Ignition of a propane-air mixture for a reflected shock wave at high pressures. *High Temp.*, 2003, vol. 41, no. 2, pp. 257–265. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1023390021091>
- [4] Zarubin V.S., Leonov V.V., Zarubin V.S. Jr. Temperature state of the anisotropic spherical layer during convective heat exchange with the environment. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, no. 4 (95), pp. 40–55 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2019-4-40-55>
- [5] Lykov A.V. *Teplomassoobmen [Heat and Mass Transfer]*. Moscow, Energiya, 1978.
- [6] Shashkov A.G., Bubnov A.V., Yanovskiy S.Yu. *Volnovye yavleniya teploprovodnosti [Wave phenomena of heat conduction]*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004.
- [7] Formalev V.F., Kartashov É.M., Kolesnik S.A. On the dynamics of motion and reflection of temperature solitons in wave heat transfer in limited regions. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2020, vol. 93, no. 1, pp. 10–15. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-020-02085-9>
- [8] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L. Wave heat transfer in the orthotropic half-space under the action of a nonstationary point source of thermal energy. *High Temp.*, 2018, vol. 56, no. 5, pp. 727–731. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X18050073>
- [9] Formalev V.F., Kartashov É.M., Kolesnik S.A. Simulation of nonequilibrium heat transfer in an anisotropic semispace under the action of a point heat source. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2019, vol. 92, no. 6, pp. 1537–1547. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-019-02074-7>
- [10] Kartashov E.M. Mathematical models of heat conduction with a two-phase lag. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2016, vol. 89, no. 2, pp. 346–356. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-016-1385-9>
- [11] Sobolev S.L. Discrete space-time model for heat conduction: application to size dependent thermal conductivity in nano-films. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2017, vol. 108, part A, pp. 933–939. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.12.051>

[12] Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V., et al. Strongly nonequilibrium model of thermal ignition with account for space-time nonlocality. *Combust. Explos. Shock Waves*, 2018, vol. 54, no. 6, pp. 649–653.

DOI: <https://doi.org/10.1134/S0010508218060035>

[13] Kirsanov Yu.A. The influence of thermal relaxation and thermal damping on transient processes with cyclic boundary conditions. *High Temp.*, 2017, vol. 55, no. 4, pp. 535–540. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X17030130>

[14] Kudinov I.V., Eremin A.V., Kudinov V.A., et al. Mathematical model of damped elastic rod oscillations with dual-phase-lag. *Int. J. Solids Struct.*, 2020, vol. 200-201, pp. 231–241. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.05.018>

[15] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Garibyan B.A. Heat transfer with absorption in anisotropic thermal protection of high-temperature products. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2019, no. 5 (86), pp. 35–49 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2019-5-35-49>

[16] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Garibyan B.A. Analytical solution of the problem of conjugate heat transfer between a gasdynamic boundary layer and anisotropic strip. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2020, no. 5 (92), pp. 44–59 (in Russ.).

DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2020-5-44-59>

[17] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Garibyan B.A. Mathematical modeling of heat and mass transfer during aerodynamic heating of the nose parts of hypersonic aircraft. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 1 (100), pp. 107–121 (in Russ.).

DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2022-1-107-121>

**Formalev V.F.** — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Computational Mathematics and Programming, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

**Garibyan B.A.** — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assist. Professor, Department of Mathematical Cybernetics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

**Kolesnik S.A.** — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Computational Mathematics and Programming, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Formalev V.F., Garibyan B.A., Kolesnik S.A. Mathematical simulation of thermal shock wave dynamics in nonlinear local non-equilibrium media. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 4 (103), pp. 80–94 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-4-80-94>