

УДК 536.2

А. В. А т т е т к о в, Л. Н. В л а с о в а,
И. К. В о л к о в

СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ ОБЛАСТИ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ

Для определения температурного поля двухслойной области с движущимися по заданному закону границами в аналитически замкнутом виде разработано интегральное преобразование по пространственной переменной.

E-mail: mathmod@bmstu.ru

Ключевые слова: двухслойное полупространство, подвижность границы, температурное поле, сингулярное интегральное преобразование.

В математической теории теплопроводности [1–3] важное место занимают задачи об определении температурного поля в областях, границы которых с течением времени перемещаются [3–5]. Особый интерес представляют обобщенные краевые задачи нестационарной теплопроводности в областях с движущимися по заданному закону границами [3–7]. При этом, несмотря на значительное число работ, исследования по изучаемой проблеме вряд ли можно считать завершенными. В частности, актуальной остается задача об определении температурного поля в двухслойной области с внешней и внутренней (между слоями) границами, движущимися по заданному закону. Ее практическая значимость обусловлена, например, необходимостью математического моделирования мезоскопических процессов теплопереноса при формировании фронта конвективного горения ингибированных (полимерными материалами пленочного типа) энергетических материалов [8]. Решению этой задачи посвящена настоящая работа.

Математическая модель и ее реализуемость. Объект исследований — изотропное полупространство, на внешней границе которого, движущейся по линейному закону под действием высокоинтенсивного внешнего теплового потока, образуется пограничный слой постоянной толщины, значения теплофизических параметров которого отличны от их исходных значений для полупространства. Согласно основной цели исследований и в соответствии с принятыми допущениями математическая модель изучаемого процесса формирования температурного

поля может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta(x, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} &= a(x) \frac{\partial^2 \theta(x, \text{Fo})}{\partial x^2}, \quad x > l(\text{Fo}), \text{Fo} > 0; \\
 \theta(x, 0) &= 0; \\
 \frac{\partial \theta(x, \text{Fo})}{\partial x} \Big|_{x=l(\text{Fo})} &= -Q; \\
 \theta(l(\text{Fo}) + h - 0, \text{Fo}) &= \theta(l(\text{Fo}) + h + 0, \text{Fo}); \\
 \Lambda \frac{\partial \theta(x, \text{Fo})}{\partial x} \Big|_{x=l(\text{Fo})+h-0} &= \frac{\partial \theta(x, \text{Fo})}{\partial x} \Big|_{x=l(\text{Fo})+h+0}; \\
 \theta(x, \text{Fo}) \Big|_{\text{Fo} \geq 0} &\in L^2_\rho[l(\text{Fo}) + \infty),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где последнее условие означает, что при любом фиксированном $\text{Fo} \geq 0$ функция $\theta(x, \text{Fo})$ интегрируема с квадратом и весом $\rho(x)$ по переменной $x[l(\text{Fo}), +\infty)$. Кроме того, в (1)

$$\begin{aligned}
 l(\text{Fo}) &= \alpha \text{Fo}, \quad \alpha > 0; \\
 a(x) &= \begin{cases} 1, & x > l(\text{Fo}) + h; \\ a_0^2, & l(\text{Fo}) < x < l(\text{Fo}) + h. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2}$$

В математической модели (1), (2) обозначено:

$$\begin{aligned}
 \theta &= \frac{T - T_H}{T_H}; \quad \text{Fo} = \frac{\lambda_\Pi t}{c_\Pi \gamma_\Pi y_*^2}; \quad x = \frac{y}{y_*}; \quad a_0^2 = \frac{\lambda_0 c_\Pi \gamma_\Pi}{\lambda_\Pi c_0 \gamma_0}; \\
 \Lambda &= \frac{\lambda_0}{\lambda_\Pi}; \quad h = \frac{h_0}{y_*}; \quad Q = \frac{q y_*}{\lambda_0 T_H}; \quad \alpha = \frac{c_\Pi \gamma_\Pi y_*}{\lambda_\Pi} v.
 \end{aligned}$$

При переходе к подвижной системе координат

$$z = x - l(\text{Fo}), \quad \tau = \text{Fo},$$

где закон движения границы $l(\text{Fo})$ определен в (2), исходная математическая модель (1), (2) принимает вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta(z, \tau)}{\partial \tau} &= b(z) \frac{\partial^2 \theta(z, \tau)}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial \theta(z, \tau)}{\partial z}, \quad z > 0, \tau > 0; \\
 \theta(z, 0) &= 0; \\
 \frac{\partial \theta(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= -Q; \\
 \theta(h - 0, \tau) &= \theta(h + 0, \tau); \\
 \Lambda \frac{\partial \theta(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=h-0} &= \frac{\partial \theta(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=h+0}; \\
 \theta(z, \tau) \Big|_{\tau \geq 0} &\in L^2_\rho[0, \infty),
 \end{aligned} \tag{3}$$

где $b(z)$ — кусочно-постоянный функционал, определяемый равенствами

$$b(z) = \begin{cases} 1, & z > h; \\ a_0^2, & 0 < z < h. \end{cases} \quad (4)$$

При этом если предположить, что

$$\theta(\tau, z) = \exp\{-\varphi(z)\}u(z, \tau), \quad (5)$$

где

$$\varphi(z) = \begin{cases} \alpha/2, & z > h; \\ \alpha/2a_0^2, & 0 < z < h, \end{cases} \quad (6)$$

то, согласно (3)–(6), функция $u(z, \tau)$ определяется математической моделью, которая с позиций математической теории теплопроводности [1–3], с одной стороны, может рассматриваться как стандартная, а с другой — как обладающая значимой спецификой:

$$\frac{\partial u(z, \tau)}{\partial \tau} = b(z) \frac{\partial^2 u(z, \tau)}{\partial z^2} + c(z)u(z, \tau), \quad z > 0, \tau > 0;$$

$$u(z, 0) = 0;$$

$$\left\{ \frac{\partial u(z, \tau)}{\partial z} - \frac{\alpha}{2a_0^2}u(z, \tau) \right\} \Big|_{z=0} = -Q;$$

$$\kappa u(h-0, \tau) = u(h+0, \tau); \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Lambda \kappa \left\{ \frac{\partial u(z, \tau)}{\partial z} - \frac{\alpha}{2a_0^2}u(z, \tau) \right\} \Big|_{z=h-0} &= \\ &= \left\{ \frac{\partial u(z, \tau)}{\partial z} - \frac{\alpha}{2}u(z, \tau) \right\} \Big|_{z=h+0}; \end{aligned}$$

$$u(z, \tau) \Big|_{\tau \geq 0} \in L^2[0, +\infty).$$

В (7) $c(z)$ и κ определены равенствами:

$$c(z) = \begin{cases} -\alpha^2/4, & z > h; \\ -\alpha^2/4a_0^2, & 0 < z < h; \end{cases} \quad (8)$$

$$\kappa = \exp \left\{ \frac{\alpha h}{2a_0^2} (a_0^2 - 1) \right\}.$$

Специфика математической модели (7), (8) обусловлена как нестандартными условиями сопряжения при $z = h$, так и структурой источника, интенсивность которого зависит не только от функции $u(z, \tau)$,

но и от кусочно-постоянного функционала $c(z)$. Все это существенно усугубляет трудности, возникающие при определении температурных полей в многослойных областях [2, 3, 9, 10], и возможность определения функции $u(z, \tau)$ в аналитически замкнутом виде посредством применения к (7), (8) интегрального преобразования Лапласа по временной переменной τ [1–3] становится проблематичной.

Сингулярное интегральное преобразование. Для достижения поставленной цели было использовано сингулярное интегральное преобразование по пространственной переменной $z \in [0, +\infty)$

$$v(s, \tau) = \Phi[u(z, \tau)] \equiv \int_0^{\infty} u(z, \tau) \rho(z) \bar{K}(z, s) dz; \quad (9)$$

$$u(z, \tau) = \Phi^{-1}[v(s, \tau)] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} v(s, \tau) K(z, s) d\sigma(s), \quad (10)$$

порожденное линейным дифференциальным оператором второго порядка

$$L[\bullet] \equiv b(z) \frac{\partial^2 \bullet}{\partial z^2} + c(z) \bullet, \quad (11)$$

граничным условием при $z = 0$ и условиями сопряжения при $z = h$, соответствующими условиям, представленным в (7). При этом $v(s, \tau)$ — изображение оригинала $u(z, \tau)$; $\Phi[\bullet]$ и $\Phi^{-1}[\bullet]$ — операторы перехода от оригинала к изображению и от изображения к оригиналу соответственно; $K(z, s)$ — ядро сингулярного преобразования (9), (10) с вещественным параметром s , а $\bar{K}(z, s)$ — комплексно-сопряженная к нему функция; $\rho(z)$ и $\sigma(s)$ — весовая и спектральная функции соответственно; в (10) равенство понимается как равенство по норме в $L^2_\rho[0, +\infty)$, а $b(z)$ и $c(z)$ в правой части тождества (11) определены равенствами (4) и (8) соответственно.

Согласно общей теории интегральных преобразований [11], в рассматриваемом случае весовая функция

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \exp \left\{ - \int \frac{b'(z)}{b(z)} dz \right\} = \\ &= \exp \{ - \ln b(z) \} = \begin{cases} 1, & z > h; \\ a_0^{-2}, & 0 < z < h, \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

а ядро $K(z, s)$ искомого интегрального преобразования (9), (10) определяется как решение задачи

$$K''_{zz}(z, s) + c(z) \rho(z) K(z, s) = -s \rho(z) K(z, s), \quad z > 0; \quad (13)$$

$$\mathbf{K}(z, s) \Big|_{z=0} = 1, \quad \mathbf{K}'_z(z, s) \Big|_{z=0} = \frac{\alpha}{2a_0^2}; \quad (14)$$

$$\mathbf{K}(z, s) \Big|_{z=h-0} = \kappa \Lambda \mathbf{K}(z, s) \Big|_{z=h+0}; \quad (15)$$

$$\mathbf{K}'_z(z, s) \Big|_{z=h-0} = \kappa \mathbf{K}'_z(z, s) \Big|_{z=h+0} - \frac{\alpha \kappa}{2} \left(1 - \frac{\Lambda}{a_0^2}\right) \mathbf{K}(z, s) \Big|_{z=h+0}. \quad (16)$$

Отметим, что если ядро $\mathbf{K}(z, s)$ является решением задачи (13)–(16), то непосредственной проверкой можно убедиться в корректности равенства

$$\Phi[L[u(z, \tau)]] = -sv(s, \tau) + Q, \quad (17)$$

где $v(z, \tau)$ – изображение оригинала $u(z, \tau)$; линейный дифференциальный оператор $L[\bullet]$ определен тождеством (11), а интегральный оператор $\Phi[\bullet]$ – тождеством (9).

Общее решение уравнения (13), в котором кусочно-постоянные функционалы $c(z)$ и $\rho(z)$ определены равенствами (8) и (12) соответственно, может быть найдено стандартными методами [12] и представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(z, s) \Big|_{0 < z < h} = c_1(s) \cos \left[z \frac{\sqrt{4a_0^2 s - \alpha^2}}{2a_0^2} \right] + \\ + c_2(s) \sin \left[z \frac{\sqrt{4a_0^2 s - \alpha^2}}{2a_0^2} \right]; \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(z, s) \Big|_{z > h} = c_3(s) \cos \left[(z - h) \frac{\sqrt{4s - \alpha^2}}{2} \right] + \\ + c_4(s) \sin \left[(z - h) \frac{\sqrt{4s - \alpha^2}}{2} \right]. \quad (19) \end{aligned}$$

При этом, согласно (18) и граничным условиям (14),

$$c_1(s) \equiv 1, \quad c_2(s) = \frac{\alpha}{\sqrt{4a_0^2 s - \alpha^2}}. \quad (20)$$

Далее, воспользовавшись представлениями (18), (19) ядра сингулярного интегрального преобразования (9), (10), равенствами (20) и условиями сопряжения (15), определяем

$$\begin{aligned} c_3(s) = \frac{1}{\kappa \Lambda} \left\{ \cos \left[h \frac{\sqrt{4a_0^2 s - \alpha^2}}{2a_0^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{\sqrt{4a_0^2 s - \alpha^2}} \sin \left[h \frac{\sqrt{4a_0^2 s - \alpha^2}}{2a_0^2} \right] \right\}. \quad (21) \end{aligned}$$

Процедура определения ядра искомого интегрального преобразования (9), (10) завершается нахождением функционала $c_4(s)$. Для этого достаточно воспользоваться представлениями (18), (19) ядра $K(z, s)$, условием сопряжения (16) и равенствами (20), (21):

$$c_4(s) = \frac{1}{\kappa\Lambda\sqrt{4s - \alpha^2}} \left\{ \alpha \cos \left[h \frac{\sqrt{4a_0^2s - \alpha^2}}{2a_0^2} \right] + \frac{\alpha^2 - 4\Lambda s}{\sqrt{4a_0^2s - \alpha^2}} \sin \left[h \frac{\sqrt{4a_0^2s - \alpha^2}}{2a_0^2} \right] \right\}. \quad (22)$$

Для нахождения спектральной функции $\sigma(s)$, которую в (10) наряду с ядром $K(z, s)$ определяет оператор обращения $\Phi^{-1}[\bullet]$, введем в рассмотрение функцию $\chi(z, s)$ [11, 13], удовлетворяющую уравнению (13), условиям сопряжения (15), (16) и граничным условиям

$$\chi(z, s) \Big|_{z=0} = \frac{\alpha}{2a_0^2}, \quad \chi'_z(z, s) \Big|_{z=0} = -1, \quad (23)$$

сопряженным граничным условиям (14). По аналогии с (18)–(22) с учетом (23) приходим к представлению

$$\begin{aligned} \chi(z, s) \Big|_{0 < z < h} &= \frac{\alpha}{2a_0^2} \cos \left[z \frac{\sqrt{4a_0^2s - \alpha^2}}{2a_0^2} \right] - \\ &\quad - \frac{2a_0^2}{\sqrt{4a_0^2s - \alpha^2}} \sin \left[z \frac{\sqrt{4a_0^2s - \alpha^2}}{2a_0^2} \right]; \\ \chi(z, s) \Big|_{z > h} &= d_1(s) \cos \left[(z - h) \frac{\sqrt{4s - \alpha^2}}{2} \right] + \\ &\quad + d_2(s) \sin \left[(z - h) \frac{\sqrt{4s - \alpha^2}}{2} \right]; \end{aligned} \quad (24)$$

$$d_1(s) = \frac{1}{\kappa\Lambda} \left\{ \frac{\alpha}{2a_0^2} \cos \left[h \frac{\sqrt{4a_0^2s - \alpha^2}}{2a_0^2} \right] - \frac{2a_0^2}{\sqrt{4a_0^2s - \alpha^2}} \sin \left[h \frac{\sqrt{4a_0^2s - \alpha^2}}{2a_0^2} \right] \right\};$$

$$d_2(s) = \frac{2}{\kappa\sqrt{4s - \alpha^2}} \left\{ \frac{\alpha\kappa}{2} \left(1 - \frac{\Lambda}{a_0^2} \right) d_1(s) - \right.$$

$$- \cos \left[h \frac{\sqrt{4a_0^2 s - \alpha^2}}{2a_0^2} \right] - \frac{\alpha \sqrt{4a_0^2 s - \alpha^2}}{4a_0^4} \sin \left[h \frac{\sqrt{4a_0^2 s - \alpha^2}}{2a_0^2} \right] \Bigg\}.$$

Далее полагаем

$$W(z, s) = \chi(z, s) + m(s)K(z, s)$$

и из условия $W(z, s) \in L_\rho^2[0, +\infty)$ определяем функцию Вейля–Титчмарша $m(s)$ (the Weyl–Titchmarsh m -function), непосредственно связанную со спектральной функцией $\sigma(s)$ [11, 13]. Поскольку в рассматриваемом случае требование $W(z, s) \in L_\rho^2[0, +\infty)$ эквивалентно условию $W(z, s) \in L_\rho^2[h, +\infty)$ и при этом, согласно (19), (21), (22), (24) и формулам Эйлера [2, 11],

$$\begin{aligned} W(z, s) \Big|_{\substack{z > h; \\ \psi(z) = 0,5(z-h)\sqrt{4s-\alpha^2}}} &= \\ &= 0,5 \{ [d_1(s) - id_2(s)] + m(s) [c_3(s) - ic_4(s)] \} \exp\{i\psi(z)\} + \\ &+ 0,5 \{ [d_1(s) + id_2(s)] + m(s) [c_3(s) + ic_4(s)] \} \exp\{-i\psi(z)\}, \end{aligned}$$

то функция Вейля–Титчмарша определяется равенством

$$m(s) = - \frac{d_1(s) + id_2(s)}{c_3(s) + ic_4(s)}, \quad (25)$$

так как $\exp\{i\psi(z)\} \in L_\rho^2[h, +\infty)$ и $\exp\{-i\psi(z)\} \notin L_\rho^2[h, +\infty)$ [11, 13]. При этом интерес представляет мнимая часть комплексной функции $m(s)$, определенной равенством (25), и ее особые точки.

Если $s > \max\{\alpha^2/(4a_0^2), \alpha^2/4\}$, то функционалы $d_1(s)$, $d_2(s)$ и $c_3(s)$, $c_4(s)$, определенные равенствами (24) и (21), (22) соответственно, принимают лишь вещественные значения и согласно (25)

$$\operatorname{Im} m(s) = \frac{d_1(s)c_4(s) - d_2(s)c_3(s)}{c_3^2(s) + c_4^2(s)}. \quad (26)$$

При этом уравнение

$$c_3(s) + ic_4(s) = 0 \quad (27)$$

в рассматриваемом диапазоне изменения s корней не имеет.

Если $s < \min\{\alpha^2/(4a_0^2), \alpha^2/4\}$, то для любого возможного значения s из рассматриваемого диапазона $d_1(s) \in \mathbb{R}$, $d_2(s) \in \mathbb{C}$, $c_3(s) \in \mathbb{R}$, $c_4(s) \in \mathbb{C}$. Таким образом, согласно (25), при $s < \min\{\alpha^2/4a_0^2, \alpha^2/4\}$ функция Вейля–Титчмарша $m(s)$ принимает лишь вещественные значения и, как следствие,

$$\operatorname{Im} m(s) \equiv 0. \quad (28)$$

При этом значение $s = 0$ является корнем уравнения (27) единичной кратности, т.е. особая точка $s = 0$ — простой полюс функции Вейля–Титчмарша, определенной равенством (25).

Для взаимного расположения значений $\alpha^2/4a_0^2$ и $\alpha^2/4$ на числовой оси возможными являются лишь два случая:

$$\text{а) } \frac{\alpha^2}{4a_0^2} < \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow a_0^2 > 1$$

и

$$\text{б) } \frac{\alpha^2}{4a_0^2} > \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow a_0^2 < 1.$$

В первом случае коэффициент температуропроводности слоя конечной толщины больше его значения для покрываемого полупространства, а во втором этот слой играет роль теплозащитного покрытия. Рассмотрим обе эти версии.

Если $a_0^2 > 1$ и $s \in \left(\frac{\alpha^2}{4a_0^2}, \frac{\alpha^2}{4}\right)$, то уравнение (27) корней не имеет и $d_1(s) \in \mathbb{R}$, $d_2(s) \in \mathbb{C}$, $c_3(s) \in \mathbb{R}$, $c_4(s) \in \mathbb{C}$. Таким образом, согласно (25), справедливо тождество (28).

Если $a_0^2 < 1$ и $s \in \left(\frac{\alpha^2}{4}, \frac{\alpha^2}{4a_0^2}\right)$, то уравнение (27) корней не имеет и функционалы $d_1(s)$, $d_2(s)$ и $c_3(s)$, $c_4(s)$, определенные равенствами (24) и (21), (22) соответственно, принимают лишь вещественные значения. Таким образом, в этом случае мнимая часть функции Вейля–Титчмарша определена равенством (26), в котором, согласно (21), (22), (24) и известным соотношениям, связывающим тригонометрические гиперболические функции комплексной переменной [2], имеем

$$d_1(s) = \frac{1}{\kappa\Lambda} \left\{ \frac{\alpha}{2a_0^2} \operatorname{ch} \left[h \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4a_0^2 s}}{2a_0^2} \right] - \frac{2a_0^2}{\sqrt{\alpha^2 - 4a_0^2 s}} \operatorname{sh} \left[h \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4a_0^2 s}}{2a_0^2} \right] \right\};$$

$$d_2(s) = \frac{2}{\kappa\sqrt{4s - \alpha^2}} \left\{ \frac{\alpha\kappa}{2} \left(1 - \frac{\Lambda}{a_0^2} \right) d_1(s) - \operatorname{ch} \left[h \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4a_0^2 s}}{2a_0^2} \right] - \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 - 4a_0^2 s}}{4a_0^4} \operatorname{sh} \left[h \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4a_0^2 s}}{2a_0^2} \right] \right\}; \quad (29)$$

$$c_3(s) = \frac{1}{\kappa\Lambda} \left\{ \operatorname{ch} \left[h \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4a_0^2 s}}{2a_0^2} \right] + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 4a_0^2 s}} \operatorname{sh} \left[h \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4a_0^2 s}}{2a_0^2} \right] \right\};$$

$$c_4(s) = \frac{1}{\kappa\Lambda\sqrt{4s - \alpha^2}} \left\{ \alpha \operatorname{ch} \left[h \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4a_0^2 s}}{2a_0^2} \right] + \frac{\alpha^2 - 4\Lambda s}{\sqrt{\alpha^2 - 4a_0^2 s}} \operatorname{sh} \left[h \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4a_0^2 s}}{2a_0^2} \right] \right\}.$$

Таким образом, согласно (25)–(29) и общей теории интегральных преобразований [11, 13] полностью определен оператор $\Phi^{-1}[\bullet]$ обращения искомого сингулярного интегрального преобразования (9), (10), применяемого по пространственной переменной $z \in [0, +\infty)$ к задаче (7), (8):

$$\begin{aligned} (a_0^2 > 1) \Rightarrow u(z, \tau) &= \Phi^{-1}[v(s, \tau)] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\pi \left\{ 1 + \left(\frac{\alpha}{2a_0^2} \right)^2 \right\}} \int_{\alpha^2/4}^{\infty} v(s, \tau) \mathbf{K}(z, s) \frac{d_1(s)c_4(s) - d_2(s)c_3(s)}{c_3^2(s) + c_4^2(s)} ds + \\ &\quad + v(0, \tau) \mathbf{K}(z, 0) \operatorname{Res}[m(s)] \Big|_{s=0}; \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_0^2 < 1) \Rightarrow u(z, \tau) &= \Phi^{-1}[v(s, \tau)] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\pi \left\{ 1 + \left(\frac{\alpha}{2a_0^2} \right)^2 \right\}} \left\{ \int_{\alpha^2/4}^{\alpha^2/(4a_0^2)} v(s, \tau) \mathbf{K}(s, \tau) \frac{d_1(s)c_4(s) - d_2(s)c_3(s)}{c_3^2(s) + c_4^2(s)} ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\alpha^2/(4a_0^2)}^{\infty} v(s, \tau) \mathbf{K}(z, s) \frac{d_1(s)c_4(s) - d_2(s)c_3(s)}{c_3^2(s) + c_4^2(s)} ds \right\} + \\ &\quad + v(0, \tau) \mathbf{K}(z, 0) \operatorname{Res}[m(s)] \Big|_{s=0}, \quad (31) \end{aligned}$$

где $d_1(s)$, $d_2(s)$ и $c_3(s)$, $c_4(s)$ при $s > \alpha^2/(4a_0^2)$ определены равенствами (24) и (21), (22) соответственно, а при $s \in (\alpha^2/4, \alpha^2/(4a_0^2))$ – равенствами (29); ядро $\mathbf{K}(z, s)$ определено равенствами (18)–(22), а для получения его частного представления

$$\mathbf{K}(z, 0) \Big|_{0 < z < h} = \operatorname{ch} \left(z \frac{\alpha}{2a_0^2} \right) + \operatorname{sh} \left(z \frac{\alpha}{2a_0^2} \right),$$

$$\mathbf{K}(z, 0) \Big|_{z > h} =$$

$$= \frac{1}{\kappa\Lambda} \left[\operatorname{ch} \left(h \frac{\alpha}{2a_0^2} \right) + \operatorname{sh} \left(h \frac{\alpha}{2a_0^2} \right) \right] \left\{ \operatorname{ch} \left[(z - h) \frac{\alpha}{2} \right] + \operatorname{sh} \left[(z - h) \frac{\alpha}{2} \right] \right\} \quad (32)$$

достаточно воспользоваться известными равенствами [2, 11], связывающими тригонометрические и гиперболические функции комплекс-

ной переменной; изображение $v(0, \tau)$ определено равенствами (9), (12) и (32); изолированная особая точка $s = 0$ для функции Вейля–Титчмарша $m(s)$, определенной равенством (25), является простым полюсом и вычет в ней может быть найден стандартным способом [2, 11]:

$$\operatorname{Res}[m(s)] \Big|_{s=0} = - \frac{d_1(s) + id_2(s)}{c'_3(s) + ic'_4(s)} \Big|_{s=0}, \quad (33)$$

где согласно (24) и (21), (22) с учетом известных равенств, связывающих тригонометрические и гиперболические функции комплексной переменной [2, 11], имеют место равенства

$$\begin{aligned} d_1(0) + id_2(0) &= \frac{2}{\kappa\alpha} \left\{ \left[\frac{\alpha^2}{2\Lambda a_0^2} - \frac{\alpha^2}{4a_0^4} - 1 \right] \operatorname{ch} \left(h \frac{\alpha}{2a_0^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{2a_0^2}{\Lambda} - \frac{\alpha^2}{4a_0^4} - 1 \right] \operatorname{sh} \left(h \frac{\alpha}{2a_0^2} \right) \right\}, \\ c'_3(s) + ic'_4(s) \Big|_{s=0} &= \frac{1}{\kappa\Lambda} \left\{ \left(\frac{h}{\alpha} - 2\alpha + h \right) \operatorname{ch} \left(h \frac{\alpha}{2a_0^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2a_0^2}{\alpha^2} + \frac{2a_0^2 - 4\Lambda - h}{\alpha} - 2\alpha - h \right) \operatorname{sh} \left(h \frac{\alpha}{2a_0^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Температурное поле. Согласно равенствам (5), (6), для нахождения искомого температурного поля достаточно определить функцию $u(z, \tau)$, которая задана математической моделью (7), (8), фактически представляющую собой смешанную (начально-краевую) задачу для системы уравнений в частных производных параболического типа со специфическими условиями сопряжения. В пространстве изображений сингулярного интегрального преобразования (9), (10) ей соответствует задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка относительно изображения $v(z, \tau)$ оригинала $u(z, \tau)$, которая с учетом (11), (17) может быть определена в виде

$$\begin{aligned} v'_\tau(s, \tau) &= -sv(s, \tau) + Q, \quad \tau > 0; \\ v(s, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Решение задачи Коши (35) может быть найдено стандартными методами [12]:

$$v(s, \tau) = \frac{Q}{s} [1 - \exp(-s\tau)], \quad \tau \geq 0, \quad (36)$$

и для завершения процедуры нахождения функции $u(z, \tau)$ осталось реализовать переход от изображения $v(z, \tau)$ к оригиналу посредством применения оператора обращения $\Phi^{-1}[\bullet]$, определенного равенствами

(30)–(34), (18)–(22) и (24). При этом, согласно (36),

$$v(0, \tau) = Q\tau.$$

Выводы. 1. Применение разработанного сингулярного интегрального преобразования по пространственной переменной позволяет представить искомое температурное поле в аналитически замкнутом виде.

2. Структура оператора обращения $\Phi^{-1}[\bullet]$ разработанного сингулярного интегрального преобразования указывает на принципиальное различие процессов формирования температурных полей в изотропных полупространствах с равномерно движущимися границами для двух возможных ситуаций, в первой из которых отношение коэффициентов теплопроводностей материалов полупространства и “пограничного слоя” больше единицы, а во второй – меньше единицы.

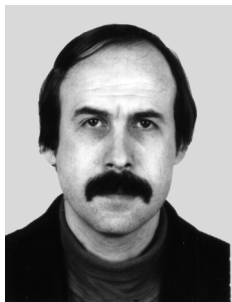
3. При проведении параметрического анализа температурного поля, а также при решении задач управления и оптимизации процесса его формирования могут возникнуть значимые технические трудности, обусловленные сложным характером зависимости ядра и спектральной функции исследуемого сингулярного интегрального преобразования от параметров исходной модели. В связи с этим целесообразно, используя исходную математическую модель (1), (2) как базовую, разработать иерархию ее упрощенных аналогов с последующим определением диапазона возможного применения каждого из них.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
3. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высш. шк., 2001. – 550 с.
4. Карташов Э. М., Любов Б. Я. Аналитические методы решения краевых задач уравнения теплопроводности в области с движущимися границами // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1974. – № 6. – С. 83–111.
5. Карташов Э. М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами // ИФЖ. – 2001. – Т. 74, № 2. – С. 171–195.
6. Аттетков А. В., Волков И. К. Математическое моделирование процессов теплопереноса в области с движущейся границей в условиях нестационарного теплообмена с внешней средой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 1999. – № 1. – С. 37–45.
7. Аттетков А. В., Власов П. А., Волков И. К. Влияние подвижности границы на температурное поле полупространства в нестационарных условиях теплообмена с внешней средой // ИФЖ. – 2002. – Т. 75, № 6. – С. 172–178.
8. Ермолаев Б. С., Сулимов А. А., Беляев А. В. и др. Моделирование конвективного горения ингибированных энергетических материалов // Химическая физика. – 2001. – Т. 20, № 1. – С. 84–93.

9. Кудинов В. А., Калашников В. В., Карташов Э. М. Теплоперенос и термоупругость в многослойных конструкциях. – М.: Энергоатомиздат, 1997. – 426 с.
10. Кудинов В. А., Калашников В. В., Карташов Э. М. Аналитические решения задач теплопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. – М.: Высш. шк., 2005. – 430 с.
11. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. шк., 1970. – 712 с.
12. Эльсгольц Л. З. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
13. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

Статья поступила в редакцию 4.04.2011



Александр Владимирович Аттетков родился в 1955 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1979 г. Канд. техн. наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники. Автор более 100 научных работ в области физики горения и взрыва, химической физики и математического моделирования.

A.V. Attetkov (b.1955) graduated from Bauman Moscow Higher Technical School in 1979. Ph. D. (Eng.), senior researcher, assoc. professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University, winner of RF Government Prize in Science and Technology. Author of more than 100 publications in the field of physics of combustion and explosion, chemical physics and mathematical simulation.

Людмила Николаевна Власова окончила МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1972 г. Канд. техн. наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры “Программное обеспечение и информационные технологии” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 50 научных работ в области газовой динамики, физики горения и взрыва.

L.N. Vlasova graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1972. Ph. D. (Eng.), senior researcher, assoc. professor of “Computer Software and Information Technologies” department of the Bauman State Technical University. Author of more than 50 publications in the field of gas dynamics and physics of combustion and explosion.



Игорь Куприянович Волков родился в 1946 г., окончил Казанский государственный университет в 1970 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор, лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники. Автор более 150 научных работ в области математической физики, математического моделирования и математической генетики.

I.K. Volkov (b. 1946) graduated from the Kazan State University in 1970. D. Sc. (Phys.-Math.), professor, winner of the RF Government Prize in Science and Technology. Author of more than 150 publications in the field of mathematical simulation and mathematical genetics.