

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ НАГРЕВЕ ИЛИ ОХЛАЖДЕНИИ ЛИМИТИРОВАННОГО ОБЪЕМА ЖИДКОСТИ

А.А. Александров<sup>1</sup>

aaa@bmstu.ru

В.А. Акатьев<sup>1</sup>

akatevva@bmstu.ru

М.П. Тюрин<sup>2</sup>

tyurin-mp@rguk.ru

Е.С. Бородина<sup>2</sup>

borodina-es@rguk.ru

О.И. Седяров<sup>2</sup>

sedlyarov-oi@rguk.ru

<sup>1</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> РГУ им. А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство),  
Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Приведены результаты аналитических исследований теплообмена при нагреве или охлаждении лимитированного объема жидкости. Цель работы — определение величины теплопередающей поверхности при начальных параметрах теплоносителей, конечной температуре в сосуде и ее тепловом эквиваленте, а также расход теплоносителя  $2$  через теплообменник, соответствующий водяному эквиваленту при заданном времени охлаждения. Рассмотрен случай, когда теплопередающая поверхность погружена в резервуар. При этом если в сосуде осуществляется интенсивное перемешивание, т. е. если по длине теплопередающей поверхности температура теплоносителя  $2$  практически не изменяется, то  $W_2 \rightarrow \infty$ . При решении использовано интегральное преобразование Лапласа — Карсона. Точное решение преобразовано для частных случаев теплообмена. Следует отметить, что во многих практических случаях формулы дают достаточно хорошее приближение к точному решению. Только при малых значениях коэффициента теплопередачи, а также когда объем, занимаемый охлаждающей жидкостью внутри теплообменного устройства, соизмерим с объемом жидкости, заключенной в сосуде, имеется необходимость применения приведенного точного решения

### Ключевые слова

Аналитические исследования, теплообменный аппарат, коэффициент теплопередачи, ограниченный объем жидкости, теплообмен

Поступила 16.09.2021

Принята 20.10.2021

© Автор(ы), 2021

---

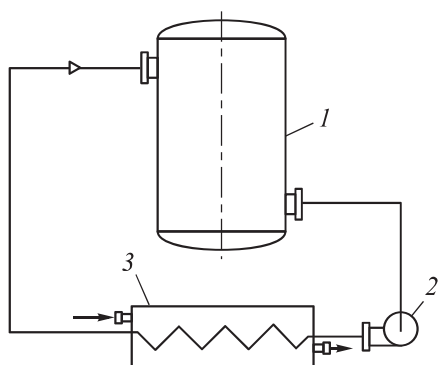
*Работа выполнена в МГТУ им. Н.Э. Баумана при поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-11-2019-087 от 18.12.2019)*

**Введение.** В химической промышленности применяют установки, в которых необходимо нагревать или охлаждать жидкость в ограниченном объеме. К таким установкам можно отнести красильные или промывные аппараты. Нагрев в них в основном осуществляется «острым» паром путем непосредственного контакта воды и пара, что ведет к неоправданно большим потерям конденсата. Однако для этих целей можно и необходимо использовать «глухой» пар, нагревая им растворы в рекуперативном подогревателе.

Исследованию нестационарных процессов теплообмена посвящено большое число работ. Так, в [1] приведены результаты исследования нестационарных режимов работы промышленных теплообменников. Аналитическим исследованиям процессов теплообмена в различных типах теплообменников посвящены работы [2–13]. Теоретико-экспериментальное исследование нестационарного теплообмена для турбулентного течения в круглой трубе приведено в [14]. Аналитическому изучению нестационарного теплообмена в рекуперативных теплообменниках посвящена работа [15].

*Цель работы* — аналитическое исследование теплообмена при нагреве и охлаждении лимитированного объема жидкости и определение величины теплопередающей поверхности.

**Постановка задачи.** Рассмотрим нестационарный процесс теплообмена в сосуде 1 (рис. 1), представляющем собой резервуар с нагреваемой либо охлаждаемой жидкостью. Циркуляция жидкости по замкнутому контуру осуществляется насосом 2. Выносной теплообменный аппарат 3 может находиться как внутри сосуда, так и снаружи. В начальный момент времени  $\tau_0$  в заполненный нагреваемой жидкостью аппарат начинает поступать греющий теплоноситель с температурой  $t_{1н}$ .



**Рис. 1.** Принципиальная схема периодического нагрева или охлаждения жидкостей в аппарате

Предположим, что температура жидкости в аппарате постоянна во всем его объеме вследствие идеального перемешивания и потери теплоты от теплообменника в окружающую среду отсутствуют. Ввиду последнего допущения можно полагать, что температура теплоносителя на входе в теплообменник в каждый момент времени равна температуре этого теплоносителя внутри аппарата. Кроме того, предположим, что аккумулярующей способностью

теплопередающей поверхности можно пренебречь, а теплофизические свойства теплоносителей постоянны и не зависят от температуры.

**Решение задачи.** Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1 c_1 f_1}{k_T} &= m_1; & \frac{\rho_2 c_2 f_2}{k_T} &= m_2; \\ \rho_1 c_1 f_1 w_1 &= W_1; & \rho_2 c_2 f_2 w_2 &= W_2; \\ \frac{m_1}{m_2} &= \psi_{12}; & \frac{m_2}{m_1} &= \psi_{21}; \\ \frac{W_1}{W_2} &= \Psi_{12}; & \frac{W_2}{W_1} &= \Psi_{21}; \\ \frac{\tau}{m_1} &= \tau'; & \frac{k_T x}{W_1} &= x'; \\ \vartheta_1 &= 1 - \frac{t_{2H} - t_1}{t_{2H} - t_{1H}}; & 1 - \vartheta_1 &= \frac{t_{2H} - t_1}{t_{2H} - t_{1H}}; & \vartheta_2 &= \frac{t_{2H} - t_2}{t_{2H} - t_{1H}}. \end{aligned}$$

Здесь  $\rho$ ,  $c$ ,  $f$  — удельная плотность, удельная теплоемкость теплоносителей и площадь поперечного сечения канала для теплоносителей соответственно;  $k_T$  — коэффициент теплопередачи;  $w$  — скорость движения теплоносителей;  $t$  — температура теплоносителя;  $\tau$  — текущее время; индексы 1 и 2 относятся к соответствующим теплоносителям.

Для противоточного движения теплоносителей теплообмен в теплообменном аппарате описывается уравнениями, приведенными в [15, 16]. Начальные условия для теплоносителя 1 описываются соотношениями

$$\vartheta_1|_{\tau'=0} = 0 \text{ и } \left. \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau'} \right|_{\tau'=0} = 0. \quad (1)$$

Начальные условия (1) характеризуют температуру теплоносителя 1 на входе в аппарат в момент времени  $\tau = 0$ .

Исходя из уравнений, приведенных в [15], для момента времени  $\tau = 0$  также можно записать

$$\left( \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x'} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau'} + \vartheta_1 \right)_{\tau'=0} = (1 - \vartheta_2)_{\tau'=0}.$$

Начальная температура охлаждаемого (нагреваемого) теплоносителя будет равна начальной температуре в аппарате. Другими словами, безразмерная температура для теплоносителя 2 равна 0. Следовательно, можно записать

$$\left. \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x'} \right|_{\tau'=0} = 1.$$

Граничное условие на входе теплоносителя 1 остается неизменным:

$$(1 - \vartheta_1) \Big|_{x'=0} = 1. \quad (3)$$

Для того чтобы полученная система дифференциальных уравнений была замкнутой, составим два уравнения теплового баланса за время  $\tau$ :

$$Q = W_2 \int_0^{\tau} (t_2|_{x=l} - t_2|_{x=0}) d\tau = \rho_1 c_1 f_1 \int_0^l (t_1 - t_{1H})_{\tau=l/w_1} \partial\tau + \quad (4)$$

$$+ W_1 \int_{l/w_1}^{\tau} (t_1|_{x=l} - t_{1H}) d\tau + \rho_1 c_1 f_1 \int_0^l (t_1 - t_{1H})_{\tau=\tau_0} dx;$$

$$Q = W_1 (t_{2H} - t_2|_{x=l}) = W_2 \int_0^{\tau} (t_2|_{x=l} - t_2|_{x=0}) d\tau. \quad (5)$$

Уравнение (4) представляет собой уравнение теплового баланса для теплообменника. Левая часть уравнения (4) характеризует теплоту, отданную теплоносителем 2 в теплообменном аппарате за период времени  $\tau$ . В правой части уравнения (4) первый член представляет собой теплоту, полученную теплоносителем 1 к моменту заполнения теплообменника; второй — теплоту, воспринятую теплоносителем 1 с момента появления его в выходном сечении аппарата до окончания охлаждения; третий — теплоту, полученную теплоносителем 1 внутри теплообменника.

Уравнение (5) представляет собой баланс теплоты, переданной теплоносителем 2 в теплообменнике и аппарате (см. рис. 1).

Продифференцируем уравнения (4) и (5) по  $\tau$  и перейдем к безразмерным переменным:

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau'} = m_1 W_1 (t_{2H} - t_{1H}) \vartheta_1 \Big|_{x'=l'};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau'} = W_2 (t_{2H} - t_{1H}) \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \tau'} \Big|_{x'=l'}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \tau} \Big|_{x'=l'} = \omega \vartheta_1 \Big|_{x'=l'}, \quad (6)$$

где

$$\omega = m_1 \frac{W_1}{W_2}; \quad m_1 = \frac{\rho_1 c_1 f_1}{k_T}.$$

Подставим в (6) вместо  $\vartheta_2$  ее выражение, в результате чего получим второе граничное условие:

$$\left( \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x' \partial \tau'} + \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial \tau'^2} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau'} + \omega \vartheta_1 \right)_{x'=l'} = 0. \quad (7)$$

Применяя преобразование Лапласа — Карсона, в области изображений получаем

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}_1}{dx'^2} + [p(1 - \psi_{21} \Psi_{12}) + 1 - \Psi_{12}] \frac{d \bar{\vartheta}_1}{dx'} - p \Psi_{12} [1 + \psi_{21} (p + 1)] \bar{\vartheta}_1 = p(1 - \psi_{21} \Psi_{12}).$$

Преобразованные граничные условия (3) и (7) будут иметь следующий вид:

$$\bar{\vartheta}_1|_{x'=0} = 0; \quad (8)$$

$$\left. \frac{d \bar{\vartheta}_1}{dx'} \right|_{x'=l'} + \frac{1}{p} [p(p + 1) + \omega] \bar{\vartheta}_1|_{x'=l'} = 1. \quad (9)$$

Рассмотрим случай, когда теплопередающая поверхность расположена непосредственно в сосуде и происходит идеальное перемешивание теплоносителя, т. е. его температура вдоль теплопередающей поверхности не изменяется. В этом случае  $W_2 \rightarrow \infty$  или  $\Psi_{12} = 0$ , тогда

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}_1}{dx'^2} + (p + 1) \frac{d \bar{\vartheta}_1}{dx'} = p. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) запишем в виде

$$\bar{\vartheta}_1 = A + B e^{-(p+1)x'} + \frac{p}{p+1} x' - \frac{p}{(p+1)^2} [1 - e^{-(p+1)x'}]. \quad (11)$$

После преобразования с учетом (8) и (9) получим

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_1 = \frac{p}{p+1} \frac{z \{ z e^{z l'} - l' [z(z-1) + \omega] e^{z l'} \} + \omega (e^{z l'} - 1)}{z \{ [z(z-1) + \omega] e^{z l'} - \omega \}} \times \\ \times (1 - e^{-z x'}) + \frac{p}{p+1} x' - \frac{p}{(p+1)^2} [1 - e^{-(p+1)x'}], \end{aligned} \quad (12)$$

где  $z = p + 1$ .

При переходе к оригиналу последние два слагаемых уравнения (12) обращаются в нуль при всех  $\tau' > x'$ . Для получения оригинала дроби ис-

пользуем теорему о разложении оператора в ряд по корням уравнения  $[z(z-1)+\omega]e^{zl'} - \omega = 0$ . Отсюда

$$\omega e^{zl'} = \omega - z(z-1)e^{zl'}. \quad (13)$$

Тогда дробь первого члена выражения (12) преобразуется к виду

$$\frac{p}{p+1} \frac{(e^{zl'} - \omega l')(1 - e^{-zx'})}{[z(z-1)+\omega]e^{zl'} - \omega}.$$

Используя правило смещения, получаем выражение для оригинала функции  $\vartheta_1$ :

$$\vartheta_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(e^{z_j l'} - \omega l')(1 - e^{-z_j x'}) e^{(z_j - 1)\tau'}}{z_j [(2z_j - 1)e^{z_j l'} + \omega l']} x' e^{-\tau'}. \quad (14)$$

Температуру находящейся в сосуде жидкости определяем из (9):

$$1 - \vartheta_2 = \vartheta_1 + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x'} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau'}. \quad (15)$$

Заменяя в (15) величину  $\vartheta_1$  выражением (14), получаем

$$1 - \vartheta_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(e^{z_j l'} - \omega l') e^{(z_j - 1)\tau'}}{(2z_j - 1)e^{z_j l'} + \omega l'} - e^{-\tau'}. \quad (16)$$

Уравнение (16) получено в предположении, что  $W_2 \rightarrow \infty$ . Этим можно объяснить то, что значение безразмерной температуры  $\vartheta_2$  не зависит от координаты, а является функцией времени. Кроме того, уравнения (14) и (16) справедливы только для  $\tau' > x'$ . Значения  $z_j$ , входящие в указанные уравнения, являются корнями уравнения (13), которое содержит два комплексных сопряженных корня и при некоторых условиях два действительных.

Запишем уравнение (13) в виде

$$l' = \frac{1}{z} \ln \frac{\omega}{z(z-1)+\omega}. \quad (17)$$

Поскольку  $l' > 0$ , то корни  $z$  могут иметь положительные действительные значения только при условии  $0 \leq z \leq 1$ . При  $z=1$   $l'=0$ ; при  $z=0$  дробь под знаком логарифма равна 1 и правая часть формулы (17) становится неопределенной. Раскрыв неопределенность, при  $z \rightarrow 0$  получим  $l' \rightarrow 1/\omega$ . При  $z = 0,5 \pm \sqrt{0,25 - \omega}$   $l' \rightarrow \infty$ . Если  $\omega > 0,25$ , то положительные корни будут существовать только при

$$l' < 2 \ln \frac{\omega}{\omega - 0,25}. \quad (18)$$

Это неравенство получается из (17), если произведению  $z(z-1)$  придать возможное наименьшее значение  $-0,25$ , чему соответствует  $z = 0,5$ .

Отрицательные корни уравнения (17) могут иметь значения  $-\infty \leq z \leq 0$ , чему соответствует изменение  $l'$  от 0 до  $1/\omega$ .

С учетом изложенного при  $\omega < 0,25$  всегда существуют два действительных корня, один из которых удовлетворяет условию  $0 \leq z \leq 0,5 - \sqrt{0,25 - \omega}$ , а второй имеет отрицательное значение в диапазоне  $-\infty \leq l' \leq 1/\omega$ . При дальнейшем возрастании  $l'$  второй корень приобретает положительное значение, достигая максимума  $z = 0,5 - \sqrt{0,25 - \omega}$  при  $l' \rightarrow \infty$ . При  $\omega > 0,25$  и значениях  $l'$ , больших определяемых неравенством (18), действительных корней уравнение (13) не имеет. Значения действительных корней уравнения (13) приведены в таблице.

**Значения действительных корней уравнения (19)**

| $\omega$ | $l'$  |           |       |           |       |           |       |           |          |           |
|----------|-------|-----------|-------|-----------|-------|-----------|-------|-----------|----------|-----------|
|          | 0     |           | 1,0   |           | 2,0   |           | 3,0   |           | $\infty$ |           |
|          | $z_1$ | $z_2$     | $z_1$ | $z_2$     | $z_1$ | $z_2$     | $z_1$ | $z_2$     | $z_1$    | $z_2$     |
| 0        | 1,0   | $-\infty$ | 1,000 | $-\infty$ | 1,000 | $-\infty$ | 1,000 | $-\infty$ | 1,000    | $-\infty$ |
| 0,1      |       |           | 0,935 | -6,030    | 0,908 | -2,100    | 0,896 | -1,030    | 0,887    | -1,113    |
| 0,2      |       |           | 0,867 | -5,020    | 0,800 | -1,490    | 0,765 | -0,560    | 0,724    | -0,276    |
| 0,3      |       |           | 0,790 | -4,370    | 0,670 | -0,760    | 0,570 | -         | -        | -         |

Как указано ранее, уравнение (13) имеет сопряженные комплексные корни:

$$z = \mu \pm iv. \quad (19)$$

Для определения комплексных корней уравнения (13) подставим в него вместо  $z$  его значения из (19):

$$\begin{cases} [\mu(\mu-1) - v^2 + \omega] \cos(vl') - v(2\mu-1) \sin(vl') = \omega e^{-\mu l'}; \\ [\mu(\mu-1) - v^2 + \omega] \sin(vl') + v(2\mu-1) \cos(vl') = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Из второго соотношения системы (20) можно получить

$$\sin(vl') = \frac{v(2\mu-1) \cos(vl')}{[\mu(\mu-1) - v^2 + \omega]}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в первое соотношение системы (20), получаем

$$\cos(vl') = \frac{\omega[\mu(\mu-1) - v^2 + \omega]}{[\mu(\mu-1) - v^2 + \omega]^2 + v^2(2\mu-1)^2} e^{-\mu l'}. \quad (22)$$

Заменим  $\cos(vl')$  в (21) на его выражение из (22):

$$\sin(vl') = -\frac{\omega v(2\mu-1)}{[\mu(\mu-1) - v^2 + \omega]^2 + v^2(2\mu-1)^2} e^{-\mu l'}. \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует, что

$$\omega e^{-\mu l'} = \sqrt{[\mu(\mu-1) - v^2 + \omega]^2 + v^2(2\mu-1)^2}. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (22) и (23), получаем

$$\begin{aligned} \cos(vl') &= \frac{\mu(\mu-1) - v^2 + \omega}{\sqrt{[\mu(\mu-1) - v^2 + \omega]^2 + v^2(2\mu-1)^2}}; \\ \sin(vl') &= -\frac{v(2\mu-1)}{\sqrt{[\mu(\mu-1) - v^2 + \omega]^2 + v^2(2\mu-1)^2}} \end{aligned}$$

или с учетом (24)

$$\begin{aligned} \sin(vl') &= -\frac{v}{\omega}(2\mu-1)e^{\mu l'}; \\ \cos(vl') &= \frac{1}{\omega}[\mu(\mu-1) - v^2 + \omega]e^{\mu l'}. \end{aligned}$$

Из уравнения (24) запишем выражение для  $v$ :

$$\begin{aligned} v &= \left\{ -\left\{ \left[ \mu(\mu-1) + \frac{1}{4} \right] + \frac{1}{4}(1-4\omega) \right\} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{(1-4\omega) \left[ \mu(\mu-1) + \frac{1}{4} \right] + \omega^2 e^{-2\mu l'}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Величина  $v$  — действительная, следовательно, подкоренное выражение больше 0, откуда

$$\mu(\mu-1) + \omega \leq \pm \omega e^{-\mu l'} \quad (25)$$

или



$$l' \leq \frac{1}{\mu} \ln \frac{\pm \omega}{\mu(\mu-1) + \omega}. \quad (26)$$

Результаты анализа условий (25) и (26) показывают, что они могут быть удовлетворены только при  $\mu < 1$ . Другими словами, действительная часть корня, определяемого (26), всегда меньше 1.

Подставляя (19) в (16), с учетом того, что при суммировании мнимые члены пропадут, получаем решение для безразмерной температуры теплоносителя 2:

$$1 - \vartheta_2 = \sum_{k=1}^2 \frac{(e^{z_k l'} - \omega l') e^{(z_k - 1)\tau'}}{(2z_k - 1)e^{z_k l'} + \omega l'} +$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{A_j}{A_j^2 + B_j^2} \left[ (\cos(v_j l') - \omega l' e^{-\mu_j l'}) \cos(v_j \tau') - \sin(v_j l') \sin(v_j \tau') \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{B_j}{A_j^2 + B_j^2} \left[ (\cos(v_j l') - \omega l' e^{-\mu_j l'}) \sin(v_j \tau') + \sin(v_j l') \cos(v_j \tau') \right] \right\} \times$$

$$\times e^{(\mu_j - 1)\tau'} - e^{-\tau'}; \quad (27)$$

$$A_j = (2\mu_j - 1) \cos(v_j l') - 2v_j \sin(v_j l') + \omega l' e^{-\mu_j l'};$$

$$B_j = 2v_j \cos(v_j l') + (2\mu_j - 1) \sin(v_j l').$$

При этом два первых корня, соответствующие действительным значениям, вынесены из-под общего знака суммы.

Результаты анализа (27) показывают, что при  $\tau' > 6$  можно ограничиться только первым членом этого соотношения для положительного корня  $z_1$ . Тогда можно записать для безразмерных температур  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$ :

$$\vartheta_1 = \frac{(e^{z_1 l'} - \omega l')(1 - e^{-z_1 \tau'})}{z_1 [(2z_1 - 1)e^{z_1 l'} + \omega l']} e^{(z_1 - 1)\tau'}; \quad (28)$$

$$\vartheta_2 = 1 - \frac{(e^{z_1 l'} - \omega l')}{[(2z_1 - 1)e^{z_1 l'} + \omega l']} e^{(z_1 - 1)\tau'}. \quad (29)$$

В большинстве практических случаев условие  $\tau' > 6$  выполняется в действительности. Однако при значениях  $l' > 1/\omega$  следует добавить в (28) и (29) второй член, содержащий корень  $z_2$ .

Результаты анализа уравнений (28) и (29) показывают, что в некоторых случаях температура находящейся в сосуде жидкости может быть ниже (выше) температуры охлаждающей (нагревающей) жидкости на выходе из аппарата, т. е.

$$1 - \vartheta_2 \leq \vartheta_1|_{x'=l'}. \quad (30)$$

Подставив в (30) значения  $\vartheta_1$  (28) и  $\vartheta_2$  (29), получим, что указанное явление будет выполняться при  $z_1 \leq 1 - e^{-z_1 l'}|_{l' > 1}$ .

Средняя температура для теплоносителя 1 определяется из выражения

$$\theta_{1cp} = \frac{1}{l'_{\tau_0} - l'} \int_{l'}^{T'_0} \vartheta_1 d\tau', \quad (31)$$

где  $T'_0$  — безразмерное время, соответствующее общей длительности теплообмена.

Интегрируя (31) с учетом (28), получаем

$$\vartheta_{1cp} = \frac{(e^{z_1 l'} - \omega l')(1 - e^{z_1 l'}) \left[ e^{(z_1 - 1)T'_0} - e^{(z_1 - 1)l'} \right]}{z_1 (z_1 - 1) (T'_0 - l') \left[ (2z_1 - 1) e^{z_1 l'} + \omega l' \right]}$$

или с учетом (29)

$$\vartheta_{1cp} = \frac{(1 - \vartheta_2) e^{(1 - z_1)(T'_0 - l')} - 1}{T'_0 - l'} \frac{1}{z_1 (1 - z_1)} (1 - e^{z_1 l'}), \quad (32)$$

где  $\vartheta_{1cp}$  — средняя безразмерная температура теплоносителя в сосуде за весь период нагрева (охлаждения).

Соотношения (29) и (32) могут быть использованы для расчета процессов нагрева или охлаждения жидкостей в сосудах с погруженной в них поверхностью теплообмена. Как правило, целью расчета является получение требуемых размеров теплопередающей поверхности ( $l'$ ), необходимых для достижения в сосуде с жидкостью требуемой температуры в заданное время. Расчет осуществляется методом итераций.

Из (28) и (29) вытекает следующее. Рассмотрим дробь

$$\frac{t_2 - t_{1H}}{t_2 - t_{1x'=l'}} = \frac{1 - \vartheta_2}{1 - \vartheta_2 - \vartheta_{1x'=l'}}. \quad (33)$$

Подставим в (33)  $\vartheta_1$  (28) и  $\vartheta_2$  (29), тогда

$$\frac{1 - \vartheta_2}{1 - \vartheta_2 - \vartheta_{1x'=l'}} = \frac{z_1}{z_1 - 1 + e^{-z_1 l'}} = A. \quad (34)$$

Таким образом, для указанных условий теплообмена отношение разностей значений температуры  $\frac{1 - \vartheta_2}{1 - \vartheta_2 - \vartheta_{1x'=l'}}$  — величина постоянная.

Это утверждение является приближенным, ограниченным допущениями, которые приняты при получении соотношений (28) и (29).

Из (34) следует

$$\vartheta_1|_{x'=l'} = \frac{A-1}{A}(1 - \vartheta_2).$$

Очевидно, что

$$\vartheta_{1cp} = \frac{A-1}{A}(1 - \vartheta_{2cp}), \quad (35)$$

где  $\vartheta_{2cp}$  — средняя безразмерная температура теплоносителя 2.

Примем в качестве  $1 - \vartheta_{2cp}$  ее среднюю логарифмическую величину, соответствующую началу нагрева (охлаждения) и его концу, тогда

$$1 - \vartheta_{2cp} = \frac{1 - (1 - \vartheta_2)}{\ln(1/(1 - \vartheta_2))} = -\frac{\vartheta_2}{\ln(1/(1 - \vartheta_2))}. \quad (36)$$

Отсюда с учетом (35) получим

$$\vartheta_{1cp} = -\frac{A-1}{A} \frac{\vartheta_2}{\ln(1 - \vartheta_2)}. \quad (37)$$

Из уравнения теплового баланса в предположении бесконечно малой аккумулирующей способности охлаждающей (нагревающей) жидкости следует, что  $W_1(t_{1cp} - t_{1н})T_0 = W_2(t_{2н} - t_2)$ , откуда

$$\vartheta_{1cp} = \frac{\vartheta_2}{\omega T'_0}. \quad (38)$$

Приравнивая правые части уравнений (37) и (38), получаем

$$A = \frac{\omega T'_0}{\omega T'_0 + \ln(1 - \vartheta_2)}; \quad (39)$$

$$\omega T'_0 = \frac{A}{A-1} \ln(1 - \vartheta_2). \quad (40)$$

Соотношения (39) и (40) справедливы при условии

$$T'_0 \geq -\frac{1}{\omega} \ln(1 - \vartheta_2) \text{ или } T_0 \geq -\frac{W_2}{W_1} \ln(1 - \vartheta). \quad (41)$$

Количество передаваемой теплоты в аппарате можно описать уравнением  $Q = k_T l \Delta t_{\text{cp}} T_0$ . Поскольку  $Q = W_2 (t_{2\text{H}} - t_2)$ , то

$$\vartheta_2 = \frac{k_T l}{W_2} \frac{\Delta t_{\text{cp}}}{t_{2\text{H}} - t_{1\text{H}}} T_0. \quad (42)$$

Преобразуя правую часть (42), получаем

$$\frac{k_T l}{W_2} T_0 = \frac{k_T l}{W_1} \frac{W_1}{W_2} m_1 \frac{T_0}{m_1} = l' \omega T'_0.$$

Отсюда

$$\vartheta_2 = l' \omega T'_0 \frac{\Delta t_{\text{cp}}}{t_{2\text{H}} - t_{1\text{H}}}. \quad (43)$$

Заменяя в (43)  $\omega T'_0$  выражением (40), получаем выражение для средней разности значений температуры:

$$\Delta t_{\text{cp}} = (t_{2\text{H}} - t_{1\text{H}}) \frac{\vartheta_2}{\ln(1 - \vartheta_2)} \frac{1 - A}{l' A}.$$

Из (34) следует, что при  $z_1 = 1$

$$l' = \ln A. \quad (44)$$

Однако  $z_1 = 1$  при условии, что  $l' = 0$  (см. таблицу). Если допустить, что выражение (44) в некотором приближении справедливо при  $l' = 0$  и  $\omega > 0$ , то можно получить

$$\Delta t_{\text{cp}} = (t_{2\text{H}} - t_{1\text{H}}) \frac{\vartheta_2}{\ln(1 - \vartheta_2)} \frac{1 - A}{A \ln A}. \quad (45)$$

Решая совместно (45) и (37), получаем

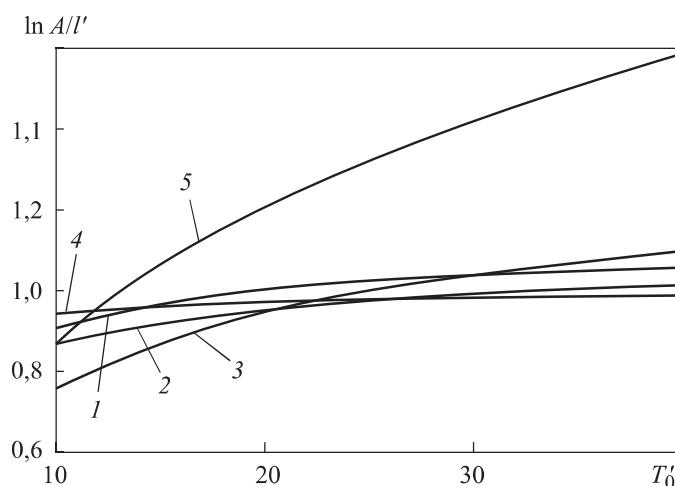
$$\vartheta_{1\text{cp}} = \frac{\Delta t_{\text{cp}}}{t_{2\text{H}} - t_{1\text{H}}} \ln A. \quad (46)$$

Соотношение (46), полученное в приложении теории стационарного теплообмена к рассматриваемой задаче, справедливо только при условии (44).

Зависимость  $\ln A / l'$  от безразмерного времени  $T'_0$  при различных значениях  $l'$  и  $\omega$  приведена на рис. 2.

При  $\omega > 0,1$  и  $l' < 2$  соотношения для средней разности значений температуры (45) и относительной средней безразмерной температуры (46)

удовлетворительно описывают теплообмен при условии  $T_0' > 10$ . При значениях  $\omega$  и  $l'$ , выходящих за эти пределы, погрешность расчетов становится существенной. При нарушении условия (41) использовать соотношения (45) и (46) невозможно.



**Рис. 2.** Зависимость  $\ln A/l'$  от безразмерного времени при  $\omega = 0,1$ ,  $l' = 0,5$  (1),  $\omega = 0,1$ ,  $l' = 1,0$  (2),  $\omega = 0,1$ ,  $l' = 2,0$  (3),  $\omega = 0,2$ ,  $l' = 1,0$  (4) и  $\omega = 0,2$ ,  $l' = 2,0$  (5)

**Выводы.** Следует отметить, что во многих практических случаях формулы (38)–(40) дают хорошее приближение к точному решению. Только при малых значениях коэффициента теплопередачи, а также когда объем, занимаемый охлаждающей жидкостью внутри теплообменного устройства, соизмерим с объемом жидкости, которая заключена в аппарате, имеется необходимость применения полученного точного решения.

При  $\omega > 0,1$  и  $l' < 2$  соотношения для средней разности значений температуры (45) и относительной средней безразмерной температуры (46) удовлетворительно описывают теплообмен при  $T_0' > 10$ . Если значения  $\omega$  и  $l'$  выходят за эти пределы, погрешность расчетов становится существенной. При нарушении условия (41) невозможно использовать соотношения (45) и (46).

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Ratel G., Mercier P., Icart G. Heat exchanger in transient conditions. In: Roetzel W., Heggs P.J., Butterworth D. (eds). *Design and Operation of Heat Exchangers. EURO THERM Seminars*, vol. 18. Berlin, Heidelberg, Springer, 1992, pp. 111–120. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-84450-8\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-642-84450-8_10)

- [2] Yalcin A.G., Ataer O.E. Transient behaviour of heat exchangers. *Int. Symp. Transient Convective Heat Transfer*, 1996.  
DOI: <https://doi.org/10.1615/ICHMT.1996.TransientConvHeatTransf.280>
- [3] Saberimoghaddam A., Bahri Rasht Abadi M.M. Transient thermal study of recuperative tube in tube heat exchanger operating in refrigeration system using experimental test and mathematical simulation. *IACHE*, 2017, vol. 14, no. 3, pp. 3–18.
- [4] Prabhakant, Tiwari G.N. Analytical study of heat exchanger design. *Energy Convers. Manag.*, 1991, vol. 32, iss. 4, pp. 403–408.  
DOI: [https://doi.org/10.1016/0196-8904\(91\)90059-R](https://doi.org/10.1016/0196-8904(91)90059-R)
- [5] Pini A., Cammi A., Luzzi L. Analytical and numerical investigation of the heat exchange effect on the dynamic behaviour of natural circulation with internally heated fluids. *Chem. Eng. Sci.*, 2016, vol. 145, pp. 108–125.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ces.2016.01.014>
- [6] Malinowski L., Bielski S. An analytical method for calculation of transient temperature field in the counter-flow heat exchangers. *Int. Commun. Heat Mass Transf.*, 2004, vol. 31, iss. 5, pp. 683–691. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0735-1933\(04\)00055-7](https://doi.org/10.1016/S0735-1933(04)00055-7)
- [7] Tyurin M.P., Borodina Y.S., Osmanov Z.N. Investigation of processes of heat and mass exchange in a closed two-phase thermosiphon for the development of energy conserving technologies in the production of edible phosphates. *Fibre Chem.*, 2018, vol. 49, iss. 6, pp. 388–393. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10692-018-9905-3>
- [8] Александров А.А., Акатьев В.А., Тюрин М.П. и др. Решение внешней и внутренней задач тепломассообмена для закрытого двухфазного термосифона. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2017, № 4 (73), с. 109–121.  
DOI: <http://doi.org/10.18698/1812-3368-2017-4-109-121>
- [9] MacArthur J.W., Grald E.W. Unsteady compressible two-phase flow model for predicting cyclic heat pump performance and a comparison with experimental data. *Int. J. Refrig.*, 1989, vol. 12, iss. 1, pp. 29–41.  
DOI: [https://doi.org/10.1016/0140-7007\(89\)90009-1](https://doi.org/10.1016/0140-7007(89)90009-1)
- [10] Валуева Е.П., Попов В.Н. Численное моделирование процесса нестационарного сопряженного теплообмена при турбулентном течении жидкости в канале. *ТВТ*, 1997, т. 35, № 6, с. 917–925.
- [11] Ho C.-D., Yeh H.-M., Sheu W.-S. An analytical study of heat and mass transfer through a parallel-plate channel with recycle. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 1998, vol. 41, iss. 17, pp. 2589–2599. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(97\)00337-2](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(97)00337-2)
- [12] Тюрин М.П. Повышение эффективности технологических процессов и утилизация тепловых отходов. Дис. ... д-ра техн. наук. М., МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2002.
- [13] Guan B., Liu X., Zhang T. Analytical solutions for the optimal cooling and heating source temperatures in liquid desiccant air-conditioning system based on exergy analysis. *Energy*, 2020, vol. 203, art. 117860.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2020.117860>

[14] Hiroshi K. Experimental and analytical study of transient heat transfer for turbulent flow in a circular tube. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 1977, vol. 20, iss. 5, pp. 443–450. DOI: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(77\)90090-4](https://doi.org/10.1016/0017-9310(77)90090-4)

[15] Aleksandrov A.A., Akatev V.A., Tyurin M.P., et al. Analytical study of nonstationary modes in recuperative heat exchangers. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2020, no. 5 (92), pp. 60–71. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-5-60-71>

[16] Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М., Наука, 1992.

**Александров Анатолий Александрович** — д-р техн. наук, профессор, президент МГТУ им. Н.Э. Баумана, заведующий кафедрой «Экология и промышленная безопасность» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Акатьев Владимир Андреевич** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Экология и промышленная безопасность» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Тюрин Михаил Павлович** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Энергоресурсоэффективные технологии, промышленная экология и безопасность» РГУ им. А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство) (Российская Федерация, 119071, Москва, Малая Калужская ул., д. 1).

**Бородина Елена Сергеевна** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Энергоресурсоэффективные технологии, промышленная экология и безопасность» РГУ им. А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство) (Российская Федерация, 119071, Москва, Малая Калужская ул., д. 1).

**Седяров Олег Иванович** — канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой «Энергоресурсоэффективные технологии, промышленная экология и безопасность» РГУ им. А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство) (Российская Федерация, 119071, Москва, Малая Калужская ул., д. 1).

**Про́сьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Александров А.А., Акатьев В.А., Тюрин М.П. и др. Аналитическое исследование теплообмена при нагреве или охлаждении лимитированного объема жидкости. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 6 (99), с. 17–34. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-6-17-34>

## ANALYTICAL STUDY OF HEAT TRANSFER WHEN HEATING OR COOLING A LIMITED VOLUME OF LIQUID

A.A. Aleksandrov<sup>1</sup>

V.A. Akatev<sup>1</sup>

M.P. Tyurin<sup>2</sup>

E.S. Borodina<sup>2</sup>

O.I. Sedlyarov<sup>2</sup>

aaa@bmstu.ru

akatevva@bmstu.ru

tyurin-mp@rguk.ru

borodina-es@rguk.ru

sedlyarov-oi@rguk.ru

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup>The Kosygin State University of Russia, Moscow, Russian Federation

### Abstract

The paper shows the results of analytical studies of heat transfer when heating or cooling a limited volume of liquid. The purpose of the research was to determine the size of the heat transfer surface, with the initial parameters of the coolants, the final temperature in the reactor and its thermal equivalent, as well as the flow rate of the second coolant through the heat exchanger corresponding to the water equivalent at a given cooling time  $\tau_0$ . Moreover, if intensive mixing is carried out in the vessel, i.e., if the temperature of the second heat carrier practically does not change along the length of the heat transfer surface, then  $W_2 \rightarrow \infty$ . The solution was based on the Laplace — Carson integral transform. The exact solution was converted for special cases of heat transfer. In particular, it should be noted that in many practical cases formulas give a fairly good approximation to the exact solution. Only at low values of the heat transfer coefficient, as well as when the volume occupied by the coolant inside the heat exchanger is commensurate with the volume of the liquid contained in the vessel, it is necessary to apply the given exact solution

### Keywords

*Analytical studies, heat exchanger, heat transfer coefficient, limited fluid volume, heat transfer*

Received 16.09.2021

Accepted 20.10.2021

© Author(s), 2021

*The work was carried out at Bauman Moscow State Technical University with the support of the Ministry of Education and Science of Russian Federation (agreement no. 075-11-2019-087 of 12/18/2019)*

### REFERENCES

[1] Ratel G., Mercier P., Icart G. Heat exchanger in transient conditions. In: Roetzel W., Heggs P.J., Butterworth D. (eds). *Design and Operation of Heat Exchangers. EURO THERM Seminars*, vol. 18. Berlin, Heidelberg, Springer, 1992, pp. 111–120. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-84450-8\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-642-84450-8_10)



- [2] Yalcin A.G., Ataer O.E. Transient behaviour of heat exchangers. *Int. Symp. Transient Convective Heat Transfer*, 1996.  
DOI: <https://doi.org/10.1615/ICHMT.1996.TransientConvHeatTransf.280>
- [3] Saberimoghaddam A., Bahri Rasht Abadi M.M. Transient thermal study of recuperative tube in tube heat exchanger operating in refrigeration system using experimental test and mathematical simulation. *IChE*, 2017, vol. 14, no. 3, pp. 3–18.
- [4] Prabhakant, Tiwari G.N. Analytical study of heat exchanger design. *Energy Convers. Manag.*, 1991, vol. 32, iss. 4, pp. 403–408.  
DOI: [https://doi.org/10.1016/0196-8904\(91\)90059-R](https://doi.org/10.1016/0196-8904(91)90059-R)
- [5] Pini A., Cammi A., Luzzi L. Analytical and numerical investigation of the heat exchange effect on the dynamic behaviour of natural circulation with internally heated fluids. *Chem. Eng. Sci.*, 2016, vol. 145, pp. 108–125.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ces.2016.01.014>
- [6] Malinowski L., Bielski S. An analytical method for calculation of transient temperature field in the counter-flow heat exchangers. *Int. Commun. Heat Mass Trans.*, 2004, vol. 31, no. 5, pp. 683–691. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0735-1933\(04\)00055-7](https://doi.org/10.1016/S0735-1933(04)00055-7)
- [7] Tyurin M.P., Borodina Y.S., Osmanov Z.N. Investigation of processes of heat and mass exchange in a closed two-phase thermosiphon for the development of energy conserving technologies in the production of edible phosphates. *Fibre Chem.*, 2018, vol. 49, iss. 6, pp. 388–393. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10692-018-9905-3>
- [8] Aleksandrov A.A., Akat'ev V.A., Tyurin M.P., et al. Solution to external and internal heat and mass transfer problems for closed two-phase thermosiphon. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2017, no. 4 (73), pp. 109–121 (in Russ.). DOI: <http://doi.org/10.18698/1812-3368-2017-4-109-121>
- [9] MacArthur J.W., Grald E.W. Unsteady compressible two-phase flow model for predicting cyclic heat pump performance and a comparison with experimental data. *Int. J. Refrig.*, 1989, vol. 12, iss. 1, pp. 29–41.  
DOI: [https://doi.org/10.1016/0140-7007\(89\)90009-1](https://doi.org/10.1016/0140-7007(89)90009-1)
- [10] Valueva E.P., Popov V.N. Numerical simulation of the process of nonstationary conjugate heat transfer in turbulent flows of liquid in channels. *High Temp.*, 1997, vol. 35, no. 6, pp. 904–912.
- [11] Ho C.-D., Yeh H.-M., Sheu W.-S. An analytical study of heat and mass transfer through a parallel-plate channel with recycle. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 1998, vol. 41, iss. 17, pp. 2589–2599. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(97\)00337-2](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(97)00337-2)
- [12] Tyurin M.P. Povyshenie effektivnosti tekhnologicheskikh protsessov i utilizatsiya teplovykh otkhodov. Dis. d-ra tekhn. nauk [Raising efficiency of technological processes and disposal of thermal waste. Cand. Sci. Eng. Diss.]. Moscow, MGTU im. A.N. Kosygina Publ., 2002 (in Russ.).
- [13] Guan B., Liu X., Zhang T. Analytical solutions for the optimal cooling and heating source temperatures in liquid desiccant air-conditioning system based on exergy analysis. *Energy*, 2020, vol. 203, art. 117860.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2020.117860>

[14] Hiroshi K. Experimental and analytical study of transient heat transfer for turbulent flow in a circular tube. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 1977, vol. 20, iss. 5, pp. 443–450. DOI: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(77\)90090-4](https://doi.org/10.1016/0017-9310(77)90090-4)

[15] Aleksandrov A.A., Akatev V.A., Tyurin M.P., et al. Analytical study of nonstationary modes in recuperative heat exchangers. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2020, no. 5 (92), pp. 60–71.

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-5-60-71>

[16] Sobolev S.L. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1992.

**Aleksandrov A.A.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, President of Bauman Moscow State Technical University, Head of Department of Ecology and Industrial Safety, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Akatev V.A.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Ecology and Industrial Safety, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Tyurin M.P.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Energy and Resource Efficient Technologies, Industrial Ecology and Safety, The Kosygin State University of Russia (Malaya Kaluzhskaya ul. 1, Moscow, 119071 Russian Federation).

**Borodina E.S.** — Cand. Sc. (Eng.), Assist. Professor, Department of Energy and Resource Efficient Technologies, Industrial Ecology and Safety, The Kosygin State University of Russia (Malaya Kaluzhskaya ul. 1, Moscow, 119071 Russian Federation).

**Sedlyarov O.I.** — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Head of the Department of Energy and Resource Efficient Technologies, Industrial Ecology and Safety, The Kosygin State University of Russia (Malaya Kaluzhskaya ul. 1, Moscow, 119071 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Aleksandrov A.A., Akatev V.A., Tyurin M.P., et al. Analytical study of heat transfer when heating or cooling a limited volume of liquid. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 6 (99), pp. 17–34 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-6-17-34>